

HEINRICH·HERTZ·INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG  
BERLIN·CHARLOTTENBURG

# Technischer Bericht Nr. 33

Zur Theorie der Längswellenausbreitung

Dr. H. VOLLAND

1 9 5 9

Zur Theorie der Längstwellenausbreitung

Zusammenfassung

Nach einer Diskussion über die Brauchbarkeit einer Modell-Ionosphäre mit scharf begrenzter Unterkante und konstanter Leitfähigkeit für die Ausbreitung von sehr langen Radiowellen ( $\lambda$  von der Grössenordnung 10 km) und einer Abschätzung des Einflusses des Erdmagnetfeldes werden die wellenoptische und die strahlenoptische Theorie der Längstwellenausbreitung entwickelt und gegenübergestellt. Der Einfluss der Erdkrümmung wird besprochen und an Hand eines Beispiels die Uebereinstimmung beider Theorien im Gebiet der Ueberschneidung ihrer Gültigkeitsbereiche (300 - 2000 km Entfernung vom Sendeort) gezeigt.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter

gez. H. Volland  
(Dr. H. Volland)

Der Abteilungsleiter

gez. Gundlach

(Prof. Dr.-Ing. F.W. Gundlach)

Der Institutsdirektor

gez. Cremer

(Prof. Dr.-Ing. L. Cremer)

Berlin-Charlottenburg, den 22. Oktober 1959

## 1. Einleitung

Im Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung in Berlin-Charlottenburg werden seit dem 1. August 1957 Feldstärke-messungen von englischen Längstwellensendern auf verschiedenen Frequenzen (16; 19,6; 51,95 kHz) vorgenommen. Die Entfernung zwischen Sende- und Empfangsort beträgt etwa 1000 km. Für eine Deutung des tages- und jahreszeitlichen Verhaltens der registrierten Feldstärke werden im folgenden die Theorien der Ausbreitung von Längstwellen zusammengestellt, die bei dieser mittleren Entfernung sowohl wellenoptische als auch strahlenoptische sein können. Die Auswertung soll sich auf die Zeit zwischen Sonnenauf- und -untergang beschränken. Am Tage findet aber die Reflexion der Längstwellen im D-Gebiet unterhalb 80 km statt, und es wird sich herausstellen, dass der Einfluss des Erdmagnetfeldes bis zu einer Höhe von 75 km in erster Näherung vernachlässigbar ist und unberücksichtigt bleiben kann.

Ueber die Zusammenstellung und Deutung der Messergebnisse wird an einer anderen Stelle berichtet werden [1].

## 2. Das Ionosphärenmodell

Erfahrungsgemäss werden elektromagnetische Wellen bis 100 kHz am Tage im ionosphärischen D-Gebiet unterhalb 80 km Höhe reflektiert [2]. In diesen Höhen ist die Elektronendichte kleiner als  $1000 \text{ Elektronen/cm}^3$  und steigt erst dann sehr rasch an. In der Abb. 1 ist ein mittleres Mitttägliches Elektronendichteprofil in Abhängigkeit von der Höhe dargestellt, das aus neueren Radio- und Raketenmessungen gewonnen worden ist [3]. (Das in Abb. 1 ausserdem eingezeichnete Stosszahlprofil stammt von M. NICOLET [4] und berücksichtigt ebenfalls neuere Raketenanstiege). Für lange Wellen der Grössenordnung  $\lambda = 10 \text{ km}$  hat sich ein Ionosphärenmodell mit scharfer unterer Begrenzung und konstanter Elektronendichte als brauchbar erwiesen [5] [6]. Um abzuschätzen, inwieweit das obere D-Gebiet mit seiner um den Faktor  $10^2$  grösseren Elektronendichte einen Einfluss auf die Reflexion der Längstwellen im unteren Teil der D-Schicht hat, wird die Ionosphäre

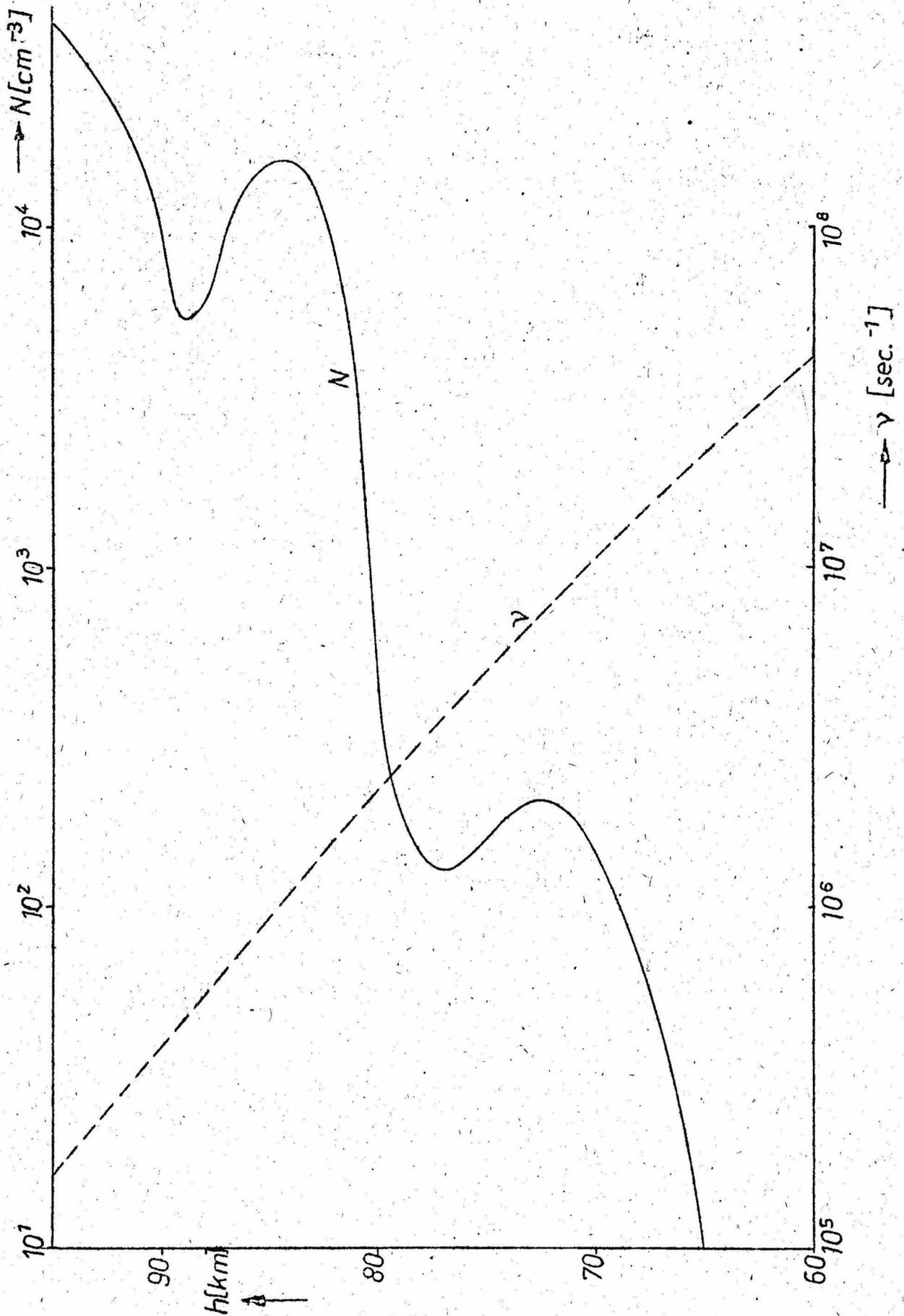


Abb. 1 Mittleres mitttägliches Elektronendichteprofil  $N$  nach R.E. HOUSTON [3] u. mittleres Stoßzahlprofil  $\gamma$  nach M. NICOLET [4]

durch ein einfaches Zweischichtenmodell mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  angenähert (vergl. Abb. 2). Die Reflexions-

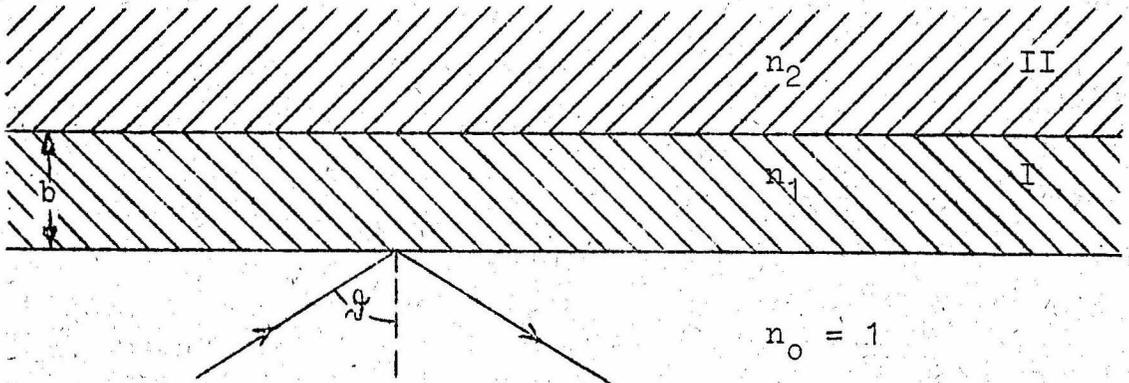


Abb. 2 Reflexion einer elektromagnetischen Welle an einem zweigeschichteten Medium mit den Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$

koeffizienten vertikal bzw. horizontal polarisierter ebener elektromagnetischer Wellen lassen sich auf bekanntem Wege leicht ermitteln und lauten:

$$R_{\parallel} = \frac{n_1^2 \cos \vartheta - Q_{\parallel} \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta}}{n_1^2 \cos \vartheta + Q_{\parallel} \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta}} \quad (1)$$

$$R_{\perp} = \frac{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta} - Q_{\perp} \cos \vartheta}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta} + Q_{\perp} \cos \vartheta} \quad (2)$$

mit

$$\left. \begin{matrix} Q_{\parallel} \\ Q_{\perp} \end{matrix} \right\} = \frac{1 - \left( \frac{R'_{\parallel}}{R'_{\perp}} \right) e^{-2ibk \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta}}}{1 + \left( \frac{R'_{\parallel}}{R'_{\perp}} \right) e^{-2ibk \sqrt{n_1^2 - \sin^2 \vartheta}}} \quad (3)$$

$R'_{\parallel}$  und  $R'_{\perp}$  sind die gewöhnlichen Reflexionskoeffizienten beim Übergang der Wellen vom Gebiet I in das Gebiet II. Ihr Betrag ist kleiner oder gleich eins.  $k = 2\pi/\lambda$  ist die Wellenzahl, und  $b$  ist die Breite der Schicht I.

Mit  $n_1^2 = 1 - \frac{i}{L}$  und  $L \approx 1$  (siehe Abschnitt 3)

sowie schrägem Einfall ( $\vartheta \geq 60^\circ$ ) wird der Betrag der Exponentialfunktion in Gl. 3

$$\leq e^{-bk}$$

Setzt man  $b = 10$  km (siehe Abb. 1), so erkennt man, dass oberhalb 10 kHz nahezu  $Q_{\parallel} = Q_{\perp} = 1$  ist. Der Einfluss des oberen Gebietes grösserer Elektronendichte ist also vernachlässigbar klein. Die obere Grenze der Anwendbarkeit dieses Modells liegt etwa bei  $\lambda = b$  ( $f = 30$  kHz), weil dann schon der stetige Verlauf der Elektronendichte berücksichtigt werden muss.

Es wird sich herausstellen, dass ein einfaches Modell mit scharf begrenzter Ionosphäre konstanter Leitfähigkeit im Frequenzbereich 5 - 50 kHz wesentliche Ausbreitungscharakteristika richtig wiedergibt [1].

### 3. Einfluss des Erdmagnetfeldes auf den Brechungsindex in der Ionosphäre

Infolge Anwesenheit des Erdmagnetfeldes ist die Ionosphäre doppelbrechend. Zur Bestimmung des Brechungsindex einer scharf begrenzten Ionosphäre konstanter Elektronendichte und Stosszahl mit äusserem homogenen Magnetfeld folgen wir dem Beispiel von J.W. YABROFF [7]. Eine ebene Welle breitet sich im Vakuum in Richtung  $(\vartheta, \psi)$  aus und treffe auf ein scharf begrenztes Plasma. Die Begrenzungsfläche sei mit der Ebene  $z = 0$  identisch (Abb. 3).

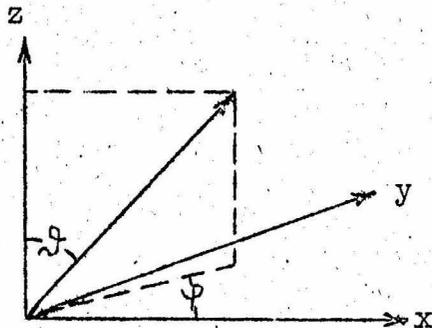


Abb. 3

Das homogene Magnetfeld sei parallel zur x-z-Ebene ausgerichtet und sei um den Winkel  $\alpha_e$  gegen die z-Achse geneigt. Für den einfallenden Vektor der elektrischen Feldstärke wird der Ansatz

$$\underline{E} = \underline{E}_0 e^{j\omega t - jk(x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + z \cos \vartheta)} \quad (4)$$

im Vakuum und

$$\underline{E}_I = \underline{E}_0 e^{j\omega t - jk(x \sin \vartheta \cos \varphi + y \sin \vartheta \sin \varphi + D z)} \quad (5)$$

im Plasma gemacht. Damit ist bereits die Stetigkeit der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke erfüllt.

Der komplexe Wert D hat die Bedeutung, dass

$$\tan \vartheta' = \frac{\sin \vartheta}{\operatorname{Re} D} \quad \text{ist,} \quad (6)$$

wo  $(\vartheta', \varphi)$  die Ausbreitungsrichtung der Fläche gleicher Phase ist.

Die Phasengeschwindigkeit in dieser Richtung beträgt

$$v = \frac{c}{(\operatorname{Re} D)^2 + \sin^2 \vartheta} \quad (7)$$

und  $k \cdot \operatorname{Im} D$  ist ein Mass für die Dämpfung der Wellen in z-Richtung. Den Brechungsindex gewinnt man aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= n \sin \vartheta' \\ D &= n \cos \vartheta' \quad \text{zu} \\ n^2 &= D^2 + \sin^2 \vartheta \end{aligned} \quad (8)$$

Elimination von  $\underline{A}$  aus den MAXWELL'schen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{A} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \underline{J} \\ \operatorname{rot} \underline{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9)$$

unter Verwendung der Bewegungsgleichung der Elektronen

$$m \frac{d\omega}{dt} + m\nu\omega = -e(\underline{E} + \mu_0 [\omega, \underline{A}]) \quad (10)$$

und  $N_e e \omega = \underline{J}$  ( $N_e = \text{Elektronendichte}$ )

ergibt

$$\left[ \frac{1}{k^2} \operatorname{rot} \operatorname{rot} - T \right] \underline{E} = 0 \quad (11)$$

Der Tensor T hat die Gestalt

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ -m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & -m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \quad (12)$$

mit

$$m_{11} = 1 + \frac{h_x^2 - s^2}{s(s^2 - h^2)} \quad m_{12} = -\frac{j h_z}{(s^2 - h^2)}$$

$$m_{22} = \frac{s}{(s^2 - h^2)} \quad m_{23} = -\frac{j h_x}{(s^2 - h^2)}$$

$$m_{33} = 1 + \frac{h_z^2 - s^2}{s(s^2 - h^2)} \quad m_{13} = \frac{h_x h_z}{s(s^2 - h^2)}$$

$$s = (1 - \frac{j\nu}{\omega}) \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

$$\omega_H = \frac{e H_0}{m} \quad \text{Gyrofrequenz}$$

$$h = \frac{\omega \omega_H}{\omega_0^2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\epsilon_0 m}} \quad \text{Plasmafrequenz der Elektronen}$$

$$h_x = h \sin \vartheta_e$$

H = Magnetfeld

$$h_z = h \cos \vartheta_e$$

\nu = Stosszahl

$$a_x = \sin \vartheta \cos \varphi$$

\omega = Kreisfrequenz

$$a_y = \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\omega_x = \omega_H \sin \vartheta_e$$

$$a = \sin \vartheta$$

$$\omega_z = \omega_H \cos \vartheta_e$$

Geht man mit dem Ansatz Gl. 5 in die Gl. 11 ein, so erhält man ein System von drei homogenen Gleichungen für die Komponenten von  $\psi$ , deren Determinante bei einer nichttrivialen Lösung verschwinden muss. Dies führt zu einer Gleichung 4. Grades für D:

$$d_4 D^4 + d_3 D^3 + d_2 D^2 + d_1 D + d_0 = 0 \quad (13)$$

mit

$$\begin{aligned}
 d_4 &= -m_{33} & (14) \\
 d_3 &= -2 m_{13} a_x \\
 d_2 &= -a_x^2 m_{11} - a_y^2 m_{22} - m_{33}(a^2 - m_{22} - m_{11}) + m_{23}^2 - m_{13}^2 \\
 d_1 &= -2 m_{13}(a_x^2 + a_y^2 - m_{22}) a_x - 2 m_{23} m_{12} a_x \\
 d_0 &= -(m_{11} - a_y^2)(m_{22} - a_x^2)(m_{33} - a^2) - (m_{11} - a_y^2)m_{23}^2 + (m_{22} - a_x^2)m_{13}^2 \\
 &\quad - 2 m_{12} m_{13} m_{23} + (a_x^2 a_y^2 - m_{12}^2)(m_{33} - a^2)
 \end{aligned}$$

aus der D bzw. n bestimmt werden können.

Für  $a = 0$  ( $\vartheta = 0^\circ$ ) erhält man die für diesen Spezialfall abgeleitete APPLETON'sche Formel:

$$D^2 = n^2 = 1 - \frac{1}{s - \frac{h_x^2}{2(s-1)} \pm \sqrt{\left(\frac{h_x^2}{2(s-1)}\right)^2 + h_z^2}} \quad (15)$$

Für die nachfolgende Untersuchung interessiert die Ausbreitungsrichtung in der y-z-Ebene ( $a_x = 0$ ;  $a_y = a$ ).

Es ist für  $52^\circ$  Breite das Dipolfeld der Erde

$$H = 0,52 \text{ Gauss}$$

und

$$\vartheta_a = 21^\circ$$

Damit wird aus Gl. 13

$$n^2 = 1 - \frac{1}{s \left[ 1 - \frac{h_x^2 + a^2 h_z^2}{2s(s-1)} \pm \sqrt{\left[ \frac{h_x^2 + a^2 h_z^2}{2s(s-1)} \right]^2 + \frac{h_z^2(s-1-a^2s)}{s^2(s-1)}} \right]} \quad (16)$$

oder

$$n^2 = 1 - \frac{j\omega_0^2}{v\omega \left[ 1 + A \pm j\sqrt{A^2 + B^2} \right]} \quad (16a)$$

mit

$$A = \frac{j\omega (\omega_x^2 + a^2 \omega_z^2)}{2v (\omega_0^2 + jv\omega)} \quad B = \frac{\omega_z}{v} \sqrt{\frac{\omega_0^2 + jv\omega(1-a^2)}{\omega_0^2 + jv\omega}}$$

Hier ist bereits von der Ungleichung

$$\omega \ll v$$

Gebrauch gemacht worden, die für Frequenzen  $\leq 50$  kHz bis etwa 80 km Höhe erfüllt ist (vergl. Abb. 1).

Zur Abschätzung der Beträge von A und B entnehmen wir der Abb. 1 Elektronendichte und Stosszahlen für die Höhen 70, 75 und 80 km (siehe Tab. 1).

h(km)	70	75	80
$v$ ( $s^{-1}$ )	$1,1 \cdot 10^7$	$4,9 \cdot 10^6$	$2,2 \cdot 10^6$
$N_e$ ( $m^{-3}$ )	$1,5 \cdot 10^8$	$1,6 \cdot 10^8$	$5,0 \cdot 10^8$

Tabelle 1

Für  $\omega = 10^5 s^{-1}$  und  $a = 1$  gibt Tabelle 2 die Beträge von A und B an.

h(km)	70	75	80
A	0,3	1,1	1,1
B	0,5	1,4	4,2

Tabelle 2

Tabelle 2 zeigt, dass die Vernachlässigung des Magnetfeldes in unserem speziellen Fall der Ausbreitung in 75 km Höhe schon eine grobe Näherung und darüber hinaus sicher nicht mehr zulässig ist. Tatsächlich wird später gezeigt werden, dass oberhalb etwa 75 km Höhe die Gültigkeit des verwendeten Modells, bei welchem das Erdmagnetfeld nicht berücksichtigt ist, eingeschränkt wird [1]. Diese Einschränkung betrifft vor allen Dingen die zweifach reflektierte Welle, die durch die anisotrope Leitfähigkeit der Ionosphäre stärker als die einfach reflektierte Welle in Mitleidenschaft gezogen wird. Andererseits kann aus der Gültigkeit des Modells unterhalb 75 km geschlossen werden, dass die Daten für die Stosszahlen grössenordnungsmässig richtig sind.

Das hier verwendete Ionosphärenmodell hat also den Brechungsindex

$$n = \sqrt{1 - \frac{j}{L}} \quad \text{mit } L = \frac{v \omega}{\omega_0^2} \quad (17)$$

und die Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \omega}{L} \quad (18)$$

wie aus der Beziehung

$$n^2 = \epsilon$$

und der 1. MAXWELL'schen Gleichung folgt.

Für 75 km Höhe und die Frequenz  $f = 15$  kHz ermittelt man

$$L = 1$$

Die Ionosphäre hat also für Längswellen eher den Charakter eines Dielektrikums als den eines Leiters.

#### 4. Strahlenoptische Theorie der Längswellenausbreitung

In Unkenntnis von genauen Antennendiagrammen der beobachteten Längswellensender und zur Vereinfachung der Rechnung werden die Senderantennen durch vertikale Dipole ersetzt. Da es im folgenden immer nur auf relative Feldstärken ankommt, wird der dadurch entstehende Fehler kaum ins Gewicht fallen. Am Empfangsort wird die Vertikalkomponente der elektrischen Feldstärke gemessen, die hier vor allem interessiert.

Es sei

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{j\omega t}$$

das Moment eines Hertz'schen Dipols in z-Richtung eines zylindrischen Koordinatensystems  $(\rho, \varphi, z)$ . Der Dipol befinde sich in der Höhe  $z_0$  im Gebiet zwischen (ebener) Erde und Ionosphäre (Abb.4).

Die Ionosphäre besitze eine scharfe untere Begrenzung in der scheinbaren Höhe  $h$  über der Erdoberfläche und habe den konstanten Brechungsindex  $n_1$  (Gl.17). Die Erde besitze den Brechungsindex  $n_e$ . Dann lässt sich sein Vektorpotential im Hohlraum

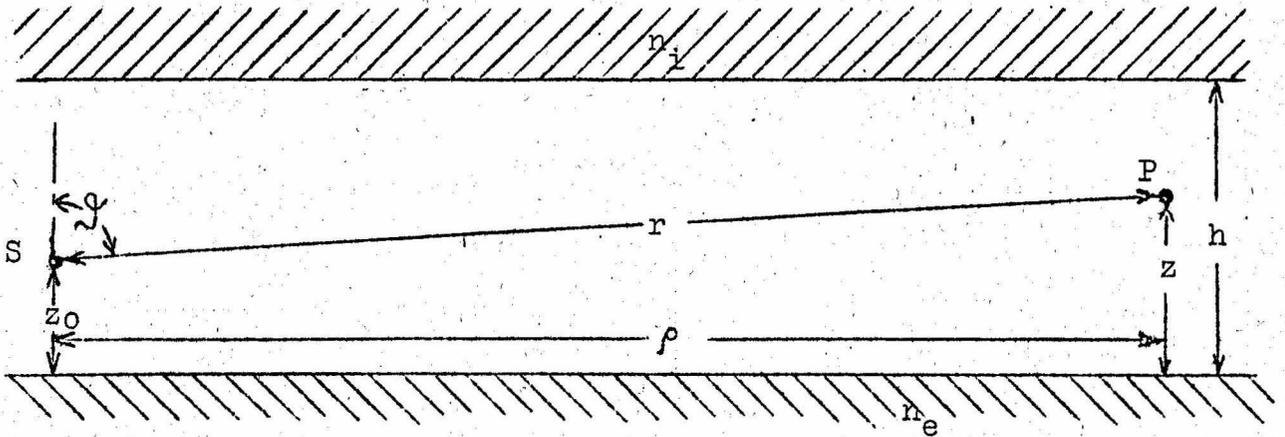


Abb. 4 Hohlleitersystem Erde-Ionosphäre

Erde-Ionosphäre nach dem Vorbild von H. WEYL [8] unter Berücksichtigung der Randbedingungen zu

$$\begin{aligned} \Pi(\rho, \varphi, z) = & -\frac{jk\rho}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2} + i\infty} \int_0^{2\pi} e^{-jk\rho S \cos(\varphi - \varphi')} S d\varphi' d\varphi' \\ & \left[ e^{-jkC|z_0 - z|} + R_e(C)e^{-jkC(z_0 + z)} + \sum_{n=1}^{\infty} R_i^n(C)R_e^{n-1}(C) \left\{ e^{-jkC(2nh - z_0 - z)} \right. \right. \\ & \left. \left. + R_e(C)e^{-jkC(2nh + z_0 - z)} + R_e(C)e^{-jkC(2nh - z_0 + z)} + R_e^2(C)e^{-jkC(2nh + z_0 + z)} \right\} \right] \\ & 0 \leq z \leq h \end{aligned} \quad (19)$$

bestimmen.

Hier ist

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_i &= S \\ \cos \vartheta_i &= C \end{aligned}$$

$$R_i^n(C) = \frac{n^2 \left(\frac{i}{e}\right) C - \sqrt{n^2 \left(\frac{i}{e}\right)^2 - 1 + C^2}}{n^2 \left(\frac{i}{e}\right) C + \sqrt{n^2 \left(\frac{i}{e}\right)^2 - 1 + C^2}} \quad (20)$$

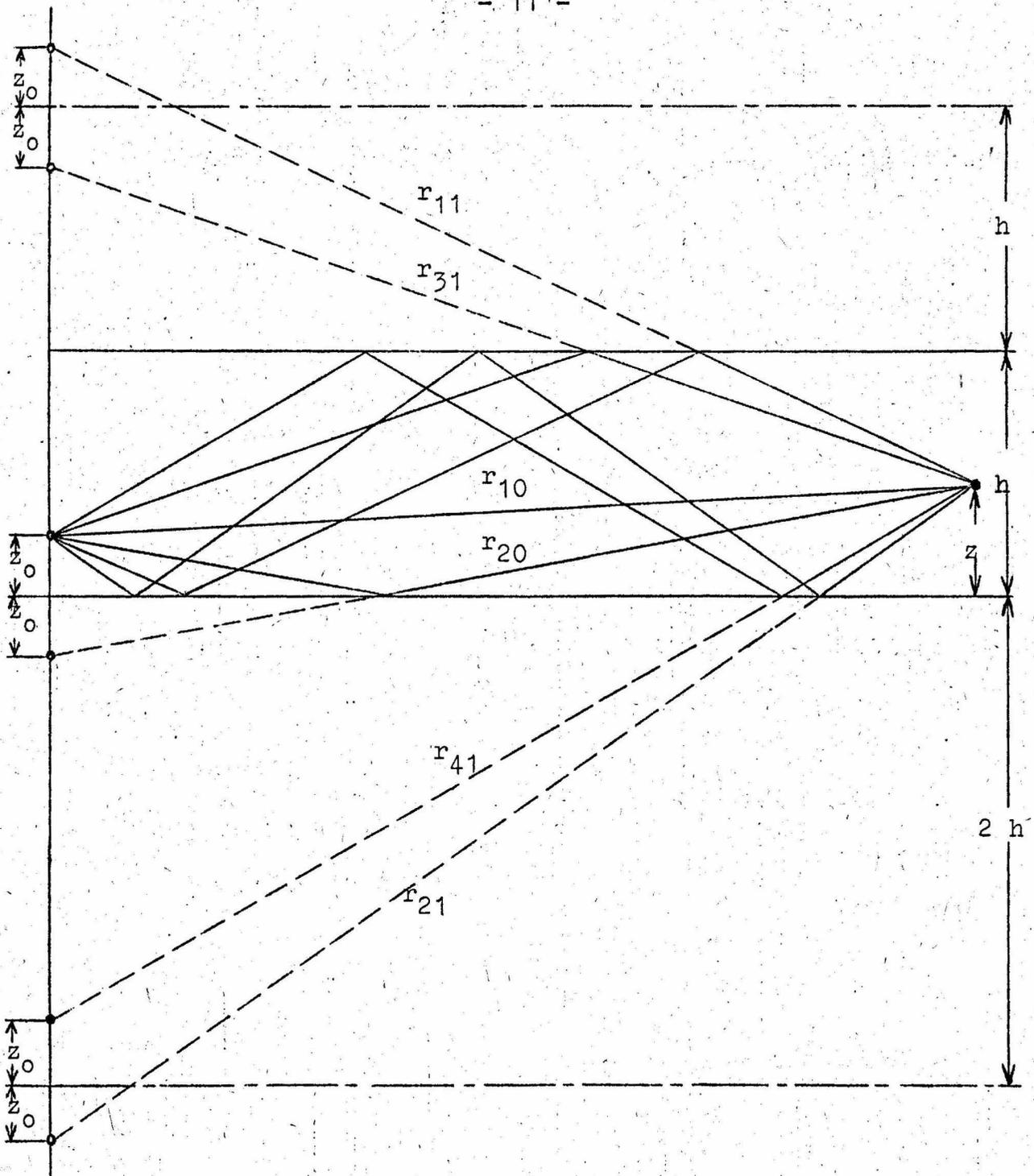


Abb. 5. Ersatzbild für Vielwegeausbreitung im System Erde-Ionosphäre. Virtuelle Dipole an den Stellen  $\pm z_0 \pm 2nh$

$$\begin{aligned}
 r_{1n}^2 &= \rho^2 + (2nh + z_0 - z)^2 \\
 r_{2n}^2 &= \rho^2 + (2nh + z_0 + z)^2 \\
 r_{3n}^2 &= \rho^2 + (2nh - z_0 - z)^2 \\
 r_{4n}^2 &= \rho^2 + (2nh - z_0 + z)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n &= 0, 1, 2, \dots \\
 n &= 0, 1, 2, \dots \\
 n &= 1, 2, \dots \\
 n &= 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Wir betrachten ein Glied der Summe unter dem Integral Gl. 19,

z.B.

$$-\frac{j k \vec{p}}{2\pi} \iint R_i^n(C) R_e^n(C) e^{-jkC(2nh+z_0-z)} e^{-jkS\rho \cos(\varphi-\varphi')} S d\vartheta' d\varphi' \quad (21)$$

In der Abb. 5 entspricht dies Glied dem Vektorpotential eines Ersatzdipols an der Stelle  $2nh + z_0 - z$ . H. WEYL [8] folgend drehen wir die Koordinatenachse des Einheitskreises  $(1, \vartheta', \varphi')$  in Richtung der Verbindungslinie Ersatzdipol-Aufpunkt und benennen dies neue Koordinatensystem  $(\vartheta'', \varphi'')$ . Die Verbindungslinie Ersatzdipol-Aufpunkt schliesst mit der positiven z-Achse den Winkel  $\vartheta'_{1n}$  ein:

$$\cos \vartheta'_{1n} = \frac{z - z_0 - 2nh}{r_{1n}}$$

$$r_{1n}^2 = \rho^2 + (2nh + z_0 - z)^2$$

und es ist

$$C = \cos \vartheta' = \cos \vartheta'_{1n} \cos \vartheta'' + \sin \vartheta'_{1n} \sin \vartheta'' \cos \varphi''$$

Die Integration nach  $\varphi''$  sei ausgeführt, und wir erhalten den Mittelwert

$$\overline{R_i^n R_e^n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_i^n R_e^n d\varphi''$$

Nach Einführung der neuen Integrationsvariablen

$$t = \frac{1 - \cos \vartheta''}{j}$$

und Integration längs eines Weges gemäss der Passmethode bekommen wir aus Gl. 21

$$\vec{p} k e^{-jkr_{1n}} \int_0^{\infty} e^{-kr_{1n}t} \overline{R_i^n} \overline{R_e^n} dt \quad (21a)$$

Sobald  $kr_{1n} \gg 1$  ist, liefert nur die nächste Umgebung um den Punkt  $t = 0$  ( $\cos \vartheta'' = 1$ ) einen Beitrag zum Integral in Gl. 21 a, und wir können setzen

$$\overline{R_i^n} \overline{R_e^n} \approx R_i^n(\cos \vartheta'_{1n}) R_e^n(\cos \vartheta'_{1n})$$

Der hier begangene Fehler ist von der Grössenordnung  $1/r_{1n}$ .

Wir erhalten schliesslich aus Gl. 21

$$\frac{\vec{p}_e}{r_{1n}} e^{-jkr_{1n}} R_i^n(\cos \vartheta_{1n}) R_e^n(\cos \vartheta_{1n}) . \quad (21b)$$

Diese Näherung gilt, solange  $r_{1n} \gg \lambda$ ,  $|n_i|$  von mässiger Grösse und  $\cos \vartheta_{1n} \neq 0$  ist, d.h. für nicht zu kleine Werte von  $2nh/r_{1n}$ . Sie versagt also für das zweite Glied des Integrals in Gl. 19, weil hier die beiden letzten Bedingungen nicht erfüllt sind. Dieses Glied gemeinsam mit dem ersten stellt aber gerade das Vektorpotential der Strahlung eines vertikalen Dipols über einer ebenen leitenden Erde ohne Berücksichtigung der Ionosphäre dar. Dieses Problem ist von A. SOMMERFELD [9] gelöst worden. Es ist

$$\begin{aligned} & - \frac{j\vec{k}\vec{p}}{2\pi} \iint e^{-jk\rho \cos(\varphi-\varphi')} \left[ e^{-jkC|z-z_0|} + R_e(C) e^{-jkC(z+z_0)} \right] \sin \vartheta' d\varphi' \\ & = \frac{2\vec{p}_e e^{-jk\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}}}{\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}} W(\alpha) \end{aligned} \quad (22)$$

Hier ist

$W(\alpha) = |W| e^{-j\Lambda}$  die SOMMERFELD'sche Dämpfungsfunktion, und

$$\alpha = -jk\rho \left( 1 - \sqrt{\frac{n_e^2}{1+n_e^2}} \right) \approx - \frac{ik\rho}{2(\epsilon' - j\sigma_e/\omega\epsilon_0)}$$

bedeutet die numerische Entfernung.

Strahlenoptisch stellt die Gl. 22 die Bodenwelle dar. Die Glieder in der Art der Gl. 21b sind alle möglichen im Aufpunkt P ankommenden Raumwellen, die auf ihrem Wege durch n-fache Reflexion an der Ionosphärenunterkante und  $n+v$ -fache Reflexion an der Erdoberfläche beeinflusst werden. In der Abb. 5 sind Bodenwelle und die ersten vier Raumwellen eingezeichnet.

Aus Gl. 19 erhält man schliesslich für  $z = z_0 = 0$  und unter Vernachlässigung der zweiten und höheren Potenzen von  $1/r_n$

$$E_z = - \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[ \rho \frac{\partial W}{\partial \rho} \right] \quad (23)$$

$$= 2E_0 \left[ W(\alpha) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \vartheta_n R_1^n R_e^n \frac{(1 + R_e)^2}{4} e^{jk(\rho - r_n)} \right]$$

$$E_0 = \frac{\omega^2 \mu_0 \vec{p}}{4\pi} \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad \text{ist die Freiraumfeldstärke des Dipols im Abstand } \rho$$

$$\sin \vartheta_n = \frac{\rho}{r_n}$$

$$r_n^2 = \rho^2 + (2nh)^2$$

Nun ist für mittleren Erdboden

$$\epsilon'_e = 10$$

$$\sigma_e = 10^{-2} \Omega^{-1} m^{-1}$$

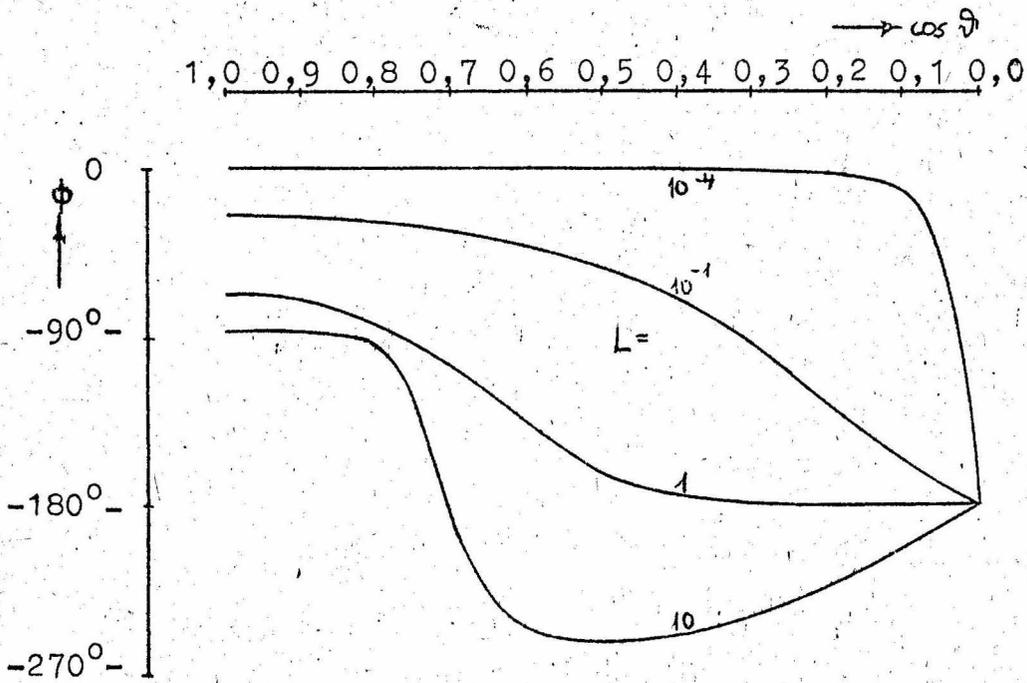
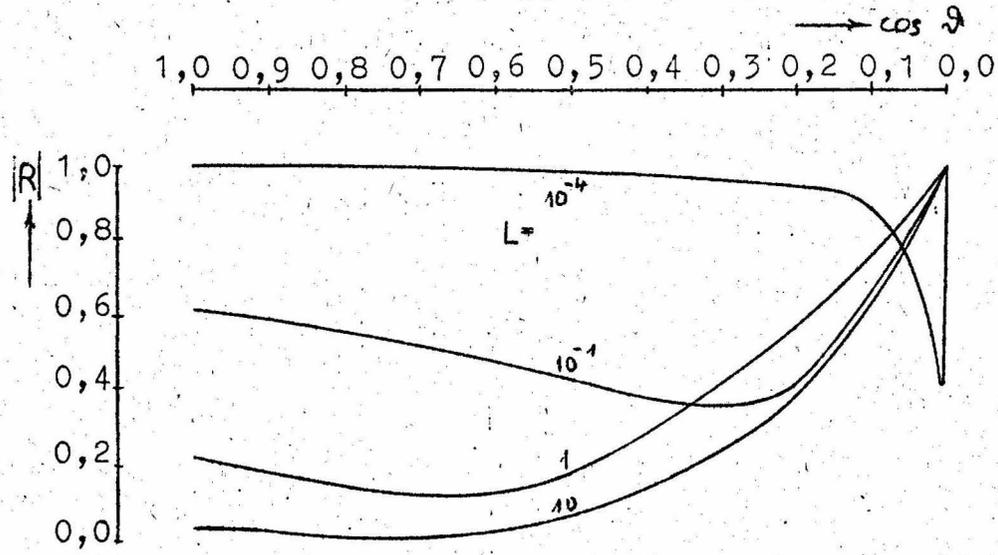
f (kHz)	20	50
$\alpha$	0,02	0,145
W	0,99	0,95
$\mathcal{L}$	2°	15°

Tabelle 3

Tabelle 3 gibt Betrag und Argument von W für die Entfernung 1000 km und die beiden Frequenzen 20 und 50 kHz an. Die Werte wurden aus Tafeln von R.JASIN [10] ermittelt. Unterhalb von 50 kHz kann praktisch  $W = 1$  gesetzt werden.

Die  $R_1$  und  $R_e$  sind jetzt die FRESNEL'schen Reflexionskoeffizienten für vertikale Polarisation

Abb. 6 Betrag  $|R|$  und Phase  $\varphi$  des FRESNEL'schen Reflexionskoeffizienten für verschiedene Werte von  $L = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$  in Abhängigkeit vom Einfallswinkel  $\vartheta$



$$R_{//} = |R| e^{i\phi} = \frac{n^2 \cos \vartheta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}}{n^2 \cos \vartheta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta}} \quad (20a)$$

Abb. 6 zeigt Betrag  $|R|$  und Phase  $\phi$  für

$$n^2 = 1 - \frac{j}{L} \quad \text{mit } L = 10^{-4}; 10^{-1}; 1; 10$$

$L = 10^{-4}$  entspricht mittleren Bodenverhältnissen bei  $\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$ . In diesem Falle ist schon bei sehr grossen Einfallswinkeln nahezu  $R_e = 1$ . Man erhält also aus Gl. 22

$$E_z = 2 E_0 \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^3 \vartheta_n R_n e^{jk(\vartheta - r_n)} \right] \quad (23a)$$

Der Abb. 6 entnimmt man, dass für  $0,1 \leq L \leq 10$  der Betrag  $|R|$  bei grossen Einfallswinkeln ähnlich verläuft. Da für die tiefe Ionosphäre  $L$  von der Grössenordnung 1 ist (siehe Abschnitt 2), folgt daraus, dass der genaue Wert der Leitfähigkeit der Modellionosphäre bei schrägem Einfall nicht sehr kritisch ist. Dies berechtigt uns, am Tage mit einer konstanten Leitfähigkeit der Modellionosphäre zu rechnen, auch dann, wenn infolge jahreszeitlicher Einflüsse oder durch Sonneneruptionen das Elektronendichteprofil der Abb. 1 deformiert oder nach oben bzw. nach unten verschoben ist. Die scheinbare Höhe  $h$  bleibt der einzige Parameter.

## 5. Wellenoptische Theorie der Längstwellenausbreitung

Mit den gleichen Voraussetzungen für das System Erde-Ionosphäre wie im Abschnitt 4 gewinnt man aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{jk\vec{p}}{2} \int H_0^{(2)}(kS\vartheta) \left[ e^{-jkC|z-z_0|} + f_1 e^{-jkC(z+z_0)} + f_2 e^{-jkC(z_0-z)} \right] S d\vartheta & 0 \leq z \leq h \\ \Pi_e &= \frac{jk_e\vec{p}}{2} \int H_0^{(2)}(k_e S_e \vartheta) f_e e^{jk_e C_e z} S_e d\vartheta & z \leq 0 \\ \Pi_i &= \frac{jk_i\vec{p}}{2} \int H_0^{(2)}(k_i S_i \vartheta) f_i e^{-jk_i C_i (z-h)} S_i d\vartheta & z \geq h \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} S^2 + C^2 &= 1 \\ S_e^2 + C_e^2 &= 1 \\ S_i^2 + C_i^2 &= 1 \end{aligned}$$

sowie den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \Pi_e &= \Pi & \Pi_i &= \Pi \\ \frac{1}{k_e^2} \frac{\partial \Pi_e}{\partial z} &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial \Pi}{\partial z} & \text{für } z=0; & \frac{1}{k_1^2} \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} = \frac{1}{k^2} \frac{\partial \Pi}{\partial z} & \text{für } z=h \end{aligned} \quad (25)$$

$$S = n_i S_i = n_e S_e \quad \text{mit} \quad n_i = k_i/k \quad \text{und} \quad n_e = k_e/k$$

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{R_e (1 + R_i e^{-j2kC(h-z_0)})}{1 - R_i R_e e^{-j2khC}} \\ f_2 &= \frac{R_i (R_e e^{-j2khC} + e^{-j2kC(h-z_0)})}{1 - R_i R_e e^{-j2khC}} \end{aligned} \quad (26)$$

Die  $R_i$  und  $R_e$  haben die Form der Gl. 20.

Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn in Gl. 19 die Reihen unter dem Integral aufsummiert werden und die Integration über  $\varphi$  vollzogen wird.

Indem nur der Beitrag der Umlaufintegrale um die Singularitäten an den Stellen

$$R_i R_e e^{-2jkC_n h} = e^{-2\pi j n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

berücksichtigt und  $R_e = 1$  gesetzt wird, erhält man (für  $z = z_0 = 0$ ) [5]

$$\Pi = -\frac{2\pi j}{h} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_0^{(2)}(kS_n \rho)}{\left(1 + \frac{j}{2khR_i} \frac{dR_i}{dC} \Big|_{C=C_n}\right)} \quad (28)$$

und

$$E_z = 2 E_0 \frac{\sqrt{\rho \lambda}}{h} e^{-j\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_n S_n^{3/2} e^{jk\rho(1-S_n)} \quad (\lambda \ll \rho) \quad (29)$$

Hier ist bereits von der asymptotischen Näherung der HANKEL'schen Funktion

$$H_0^{(2)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j(x - \frac{\pi}{4})}$$

Gebrauch gemacht worden.

Weiter gilt in guter Näherung für L von der Grössenordnung 1

$$\delta_n = \left(1 + \frac{j}{2hkR_i} \frac{dR_i}{dC} \right)_{C=C_n} \approx 1 \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\delta_0 \approx 1/2 \quad \text{für } f < 5 \text{ kHz}$$

Oberhalb 5 kHz ist die Dämpfung des 0. Modes so gross, dass er gegenüber den Modes höherer Ordnung vernachlässigt werden kann. Die Bestimmungsgleichung der Mode-Eigenwerte (Gl.27) lautet ausgeschrieben

$$\frac{(L-j)C_n - \sqrt{C_n^2 L^2 - iL}}{(L-j)C_n + \sqrt{C_n^2 L^2 - iL}} = \frac{(\epsilon'_e G - j)C_n - \sqrt{(\epsilon'_e - 1)G^2 - jG + C_n^2 G^2}}{(\epsilon'_e G - j)C_n + \sqrt{(\epsilon'_e - 1)G^2 - jG + C_n^2 G^2}} \quad (27a)$$

$$= e^{2jkhC_n - 2\pi jn}$$

mit  $C_n^2 + S_n^2 = 1$

$$L = \frac{\epsilon_0 \omega}{\epsilon_i}$$

$$G = \frac{\epsilon_0 \omega}{\epsilon_e}$$

Für  $L \approx 1$  und  $G \leq 10^{-4}$  ist

$$G < C_n < L$$

Es gilt dann näherungsweise

$$R_e \approx 1 - \frac{2\sqrt{G}}{C_n} e^{j\pi/4} = 1 - 2 q_n$$

Mit dem Ansatz

$$C_n = \bar{C}_n + \frac{\Delta_n(C_n)}{kh}$$

$$\bar{C}_n = \frac{\pi(n - 1/2)}{kh}$$

erhält man aus Gl. 27a

$$C_n = \frac{\alpha A_n}{\sqrt{jL} \sqrt{1 - A_n^2 \alpha^2}} \quad (30)$$

mit

$$\alpha = \frac{L}{L - j}$$

$$A_n = \frac{1 - 2q_n e^{2i\Delta_n}}{1 - 2q_n e^{-2i\Delta_n}} = -j \operatorname{tang} \Delta_n - q_n (1 + q_n) - q_n \operatorname{tang}^2 \Delta_n + j q_n^2 \operatorname{tang} \Delta_n \dots$$

Gl. 30 entwickelt ergibt

$$\bar{C}_n + \frac{\Delta_n}{kh} = \frac{\alpha}{\sqrt{jL}} (A_n + \frac{1}{2} \alpha^2 A_n^3 + \frac{3}{8} \alpha^4 A_n^5 \dots) \quad (30a)$$

oder

$$\Delta_n = u_n + jv_n = \frac{j\sqrt{jL}}{\alpha} \bar{C}_n + \frac{j\sqrt{jL}}{\alpha kh} \Delta_n + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{3}\right) \Delta_n^3 - \left(\frac{3}{8} \alpha^4 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{2}{15}\right) \Delta_n^5 + j q_n (1 + q_n) - q_n \Delta_n \left(\frac{3}{2} \alpha^2 - 1\right) (j \Delta_n + q_n) \dots \quad (31)$$

Das sind zwei Gleichungen für Real- und Imaginärteil von  $\Delta_n$

$$u_n = f(u_n, v_n)$$

$$v_n = g(u_n, v_n)$$

aus denen  $u_n$  und  $v_n$  durch ein Näherungsverfahren gewonnen werden können. Sie gelten etwa für

$$kh \geq 1/2\pi \quad \text{und} \quad 0,1 \leq L \leq 10.$$

Insbesondere ist für  $G = 0$  und bei Beschränkung auf die 5. Potenz von  $\Delta_n$

$$\Delta_n = B e^{j\gamma} \left[ r_{no} e^{j\varphi_0} + r_1 B r_{no} e^{j[\varphi_1 + 3\varphi_0 + 3\gamma]} + \left\{ 3 r_1^2 e^{2j\varphi_1} + r_2 e^{j\varphi_2} \right\} B r_{no} e^{5j(\varphi_0 + \gamma)} \right] \quad (32)$$

mit

$$B e^{j\gamma} = \frac{1}{1 - \frac{j\sqrt{jL}}{\alpha h k}}$$

$$r_{no} e^{j\varphi_0} = \frac{j\sqrt{jL}}{\alpha} \bar{C}_n$$

$$r_1 e^{j\varphi_1} = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{1}{3}$$

$$r_2 e^{j\varphi_2} = -\frac{3}{8} \alpha^4 + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{2}{15}$$

$$r_{no} = \frac{2n-1}{4H} \sqrt{\frac{1+L^2}{L}}$$

$$\text{tang } \varphi_0 = \frac{1+L}{1-L}$$

$$H = \frac{h}{\lambda}$$

Schliesslich ist

$$S_n = \sqrt{1 - C_n^2} = \bar{S}_n \left( 1 - \frac{\Delta_n \bar{C}_n}{kh \bar{S}_n^2} - \frac{\Delta_n^2}{2k^2 h^2 \bar{S}_n^4} \dots \right) = \alpha_n - j\beta_n \quad (33)$$

mit  $\bar{S}_n^2 + \bar{C}_n^2 = 1$

Die nullte Näherung von Gl. (31) lautet

$$\Delta_n^0 = \frac{j \sqrt{jL}}{\alpha} \bar{c}_n + i q_n \quad (31a)$$

$$S_n^0 = \alpha_n^0 - j \beta_n^0 = \bar{S}_n \left[ 1 - \frac{\bar{c}_n}{kh \bar{S}_n^2} \left( \frac{j \sqrt{jL}}{\alpha} \bar{c}_n + j q_n \right) \right] \quad (33a)$$

$$\alpha_n^0 = \bar{S}_n + \frac{1}{\sqrt{2} kh \bar{S}_n} \left[ \frac{\pi^2 (n-1/2)^2}{k^2 h^2} \left( \sqrt{L} - \frac{1}{\sqrt{L}} \right) + \sqrt{G} \right] \quad (34)$$

$$\beta_n^0 = \frac{1}{\sqrt{2} kh \bar{S}_n} \left[ \frac{\pi^2 (n-1/2)^2}{k^2 h^2} \left( \sqrt{L} + \frac{1}{\sqrt{L}} \right) + \sqrt{G} \right]$$

Die Gleichungen 34 stammen von J.R. WAIT [6].

In den Abb. 7 - 12 sind die aus den Formeln Gl. 32 und 33 errechneten Werte von  $\alpha_n$  und  $\beta_n$  als Funktion von L im Bereich  $0,1 \leq L \leq 10$  gezeichnet. Der Parameter ist  $H = \frac{h}{\lambda}$ , und die Werte gelten für  $G = 0$ .

Aus den Gl. 34 folgt, dass der Einfluss der endlichen Leitfähigkeit der Erde sich durch eine additive Grösse bemerkbar macht, die für kleine n nur wenig von der Mode-Zahl abhängt:

$$\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{2} kh \bar{S}_1} \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}_n}$$

Es lässt sich also in Gl. 29 ein für die Dämpfung durch die endliche Leitfähigkeit der Erde verantwortlicher Exponentialausdruck

$$e^{-(1+j)l} \quad \text{mit} \quad l = \frac{\rho}{h \bar{S}_1} \sqrt{\frac{\epsilon_0 \pi c}{\lambda \bar{\epsilon}_e}} \quad (35)$$

vor die Summe ziehen.

Um den Bereich guter Konvergenz der wellenoptischen Lösung Gl. 29 abzuschätzen, betrachten wir die nullte Näherung der Mode-Eigenwerte Gl. 34. Der Betrag des Gliedes n-ter Ordnung hat die Grössenordnung

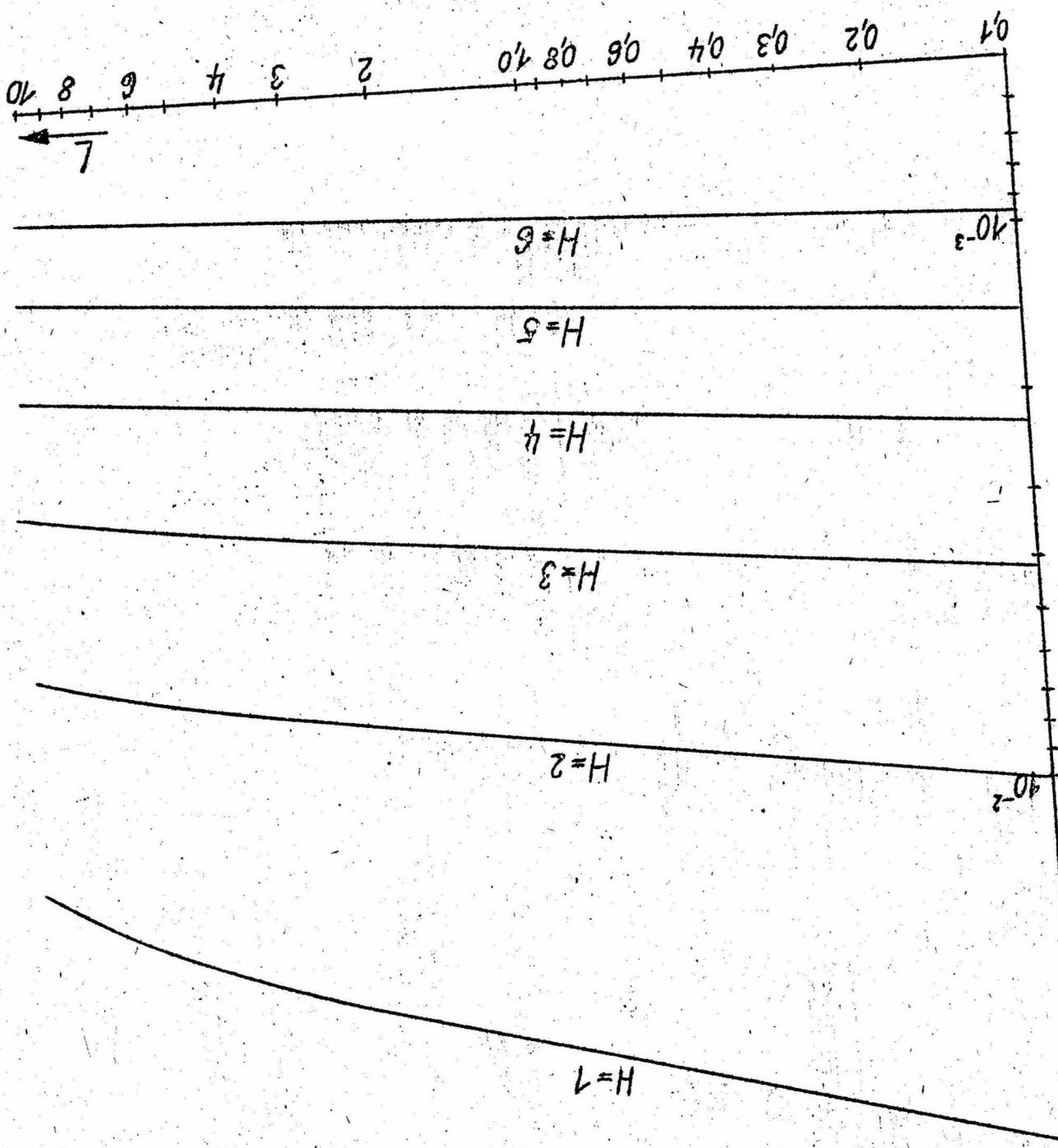
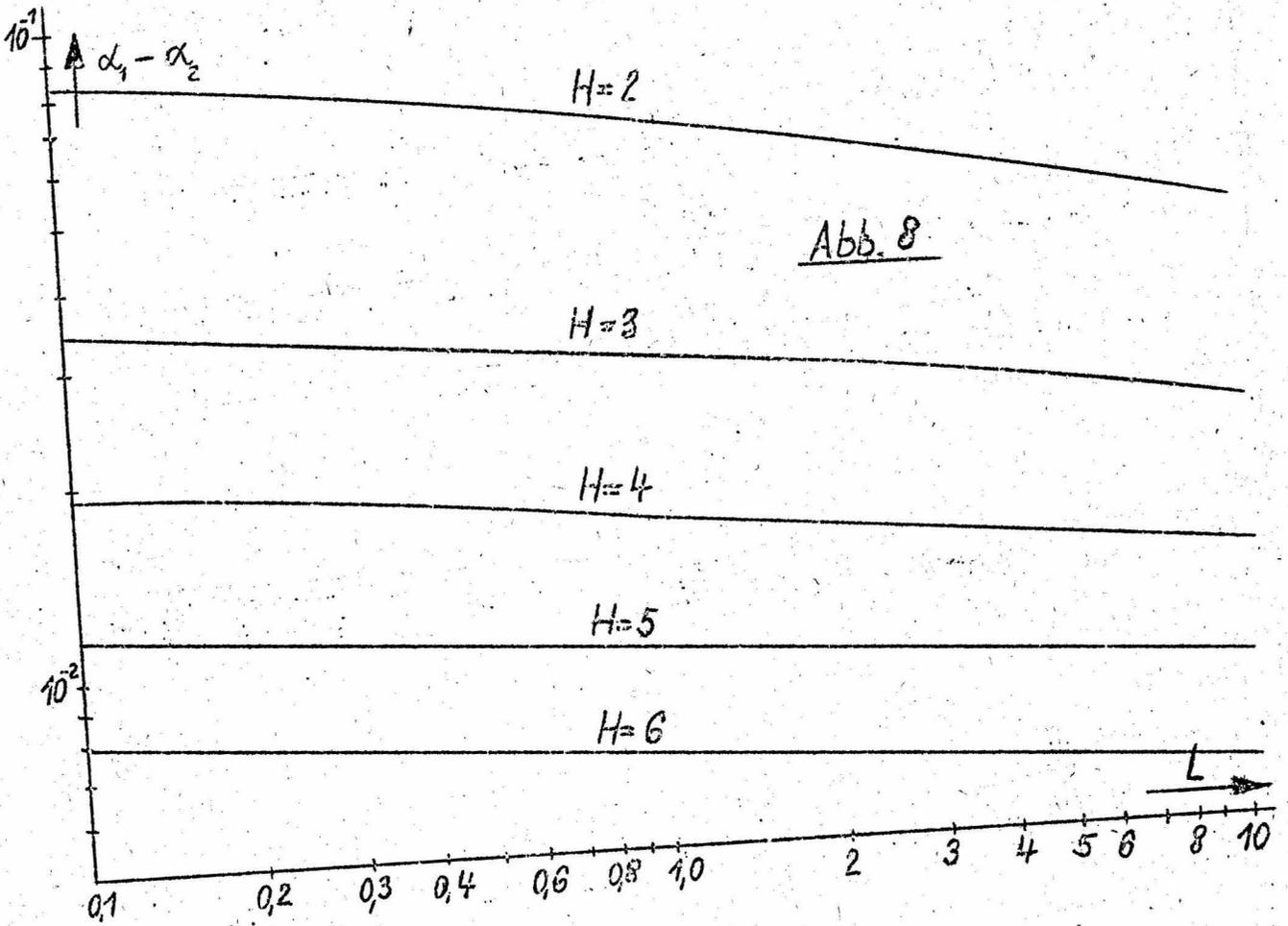
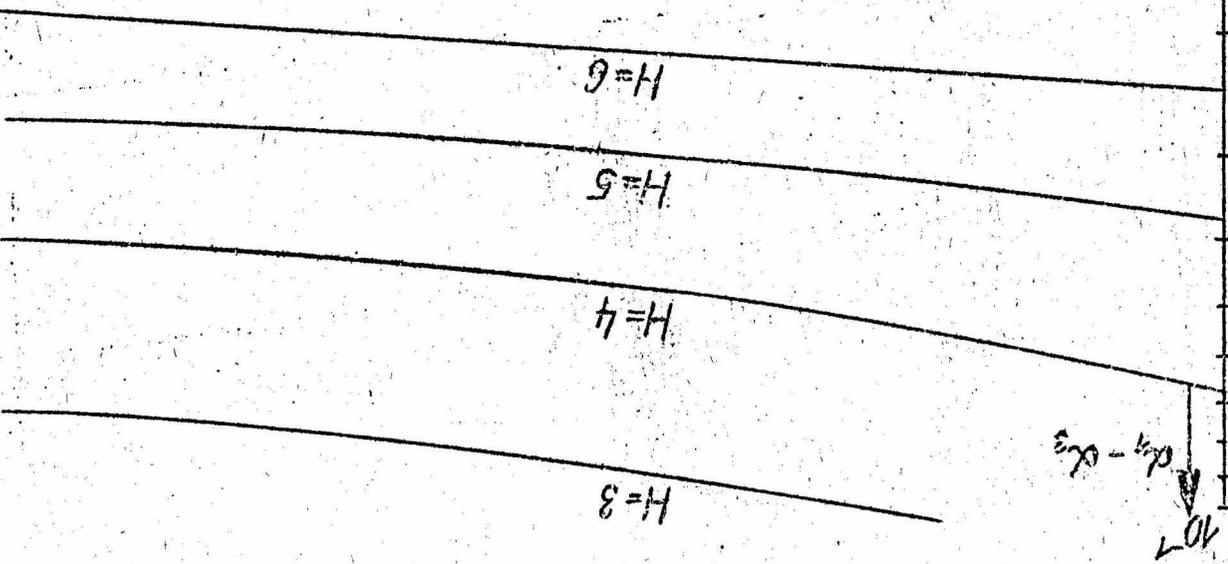
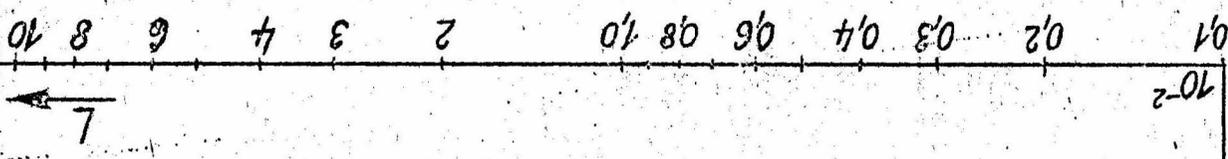
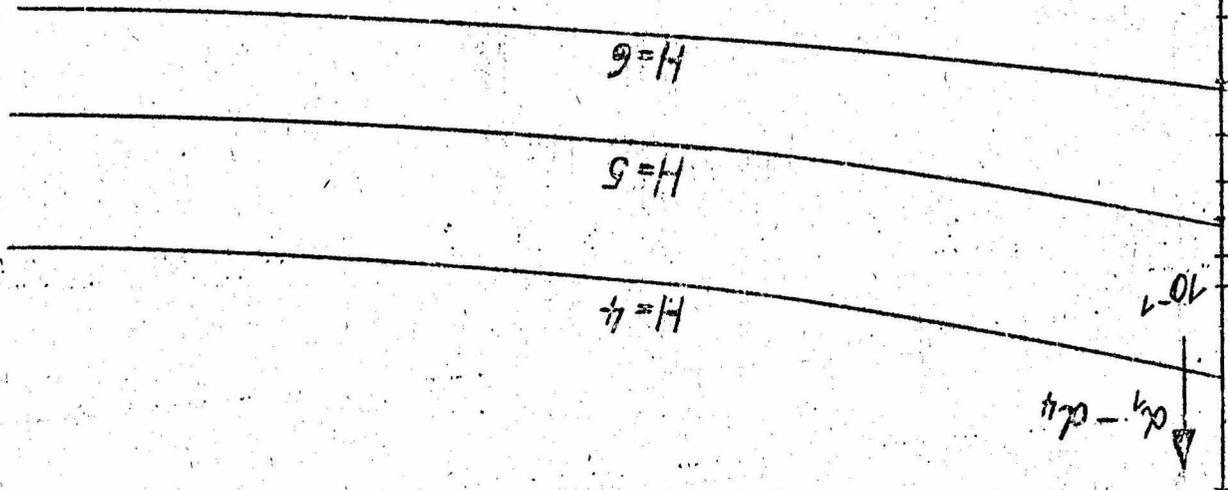
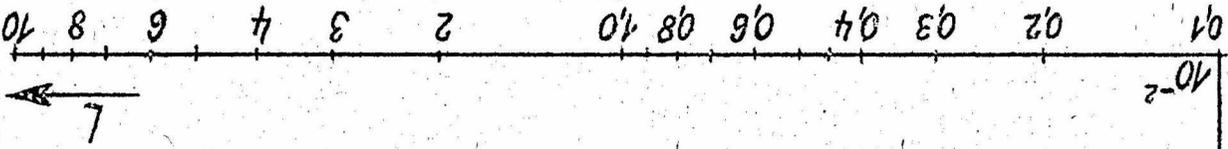


Abb. 7

0.1  
1-0.1

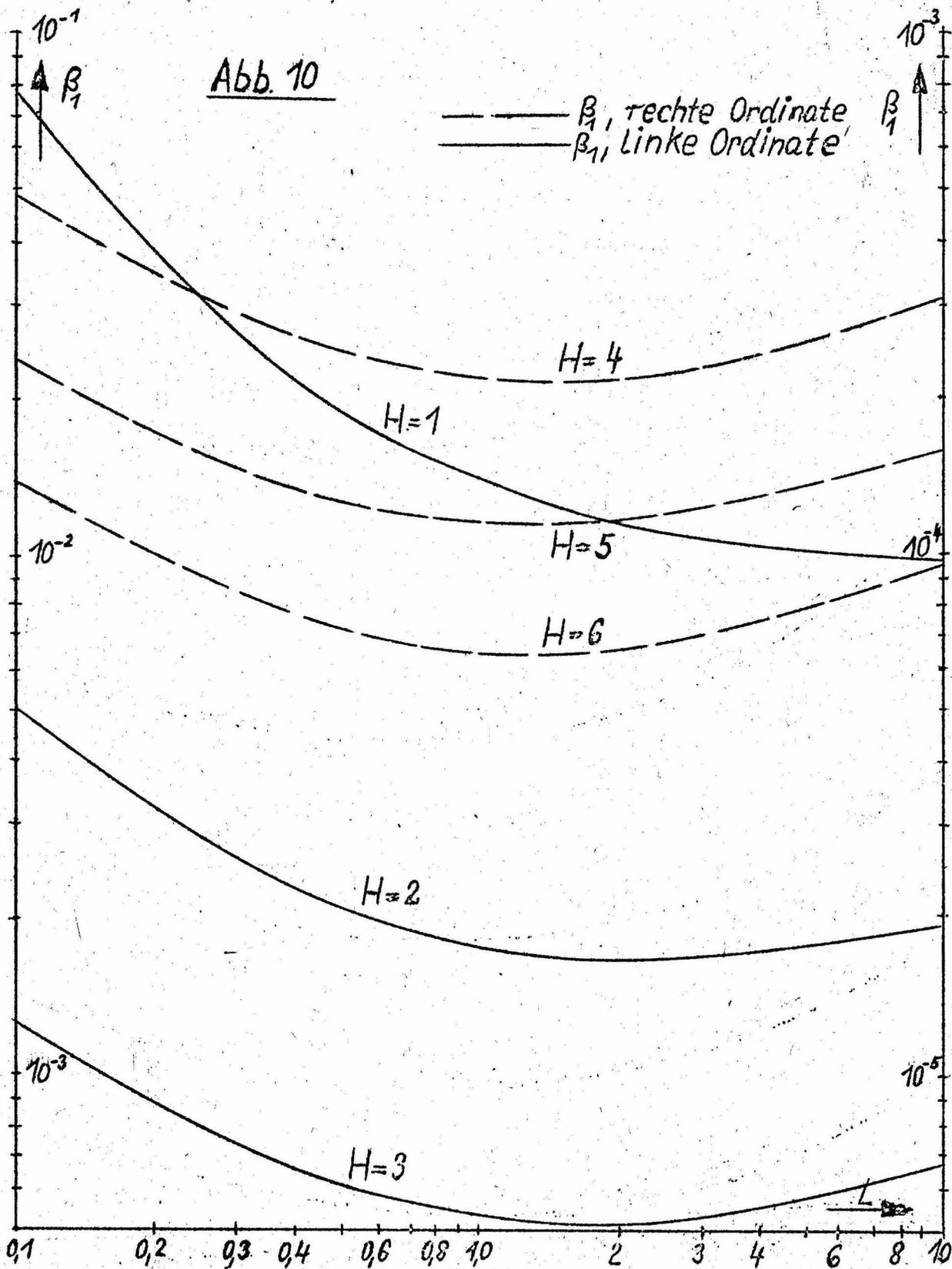


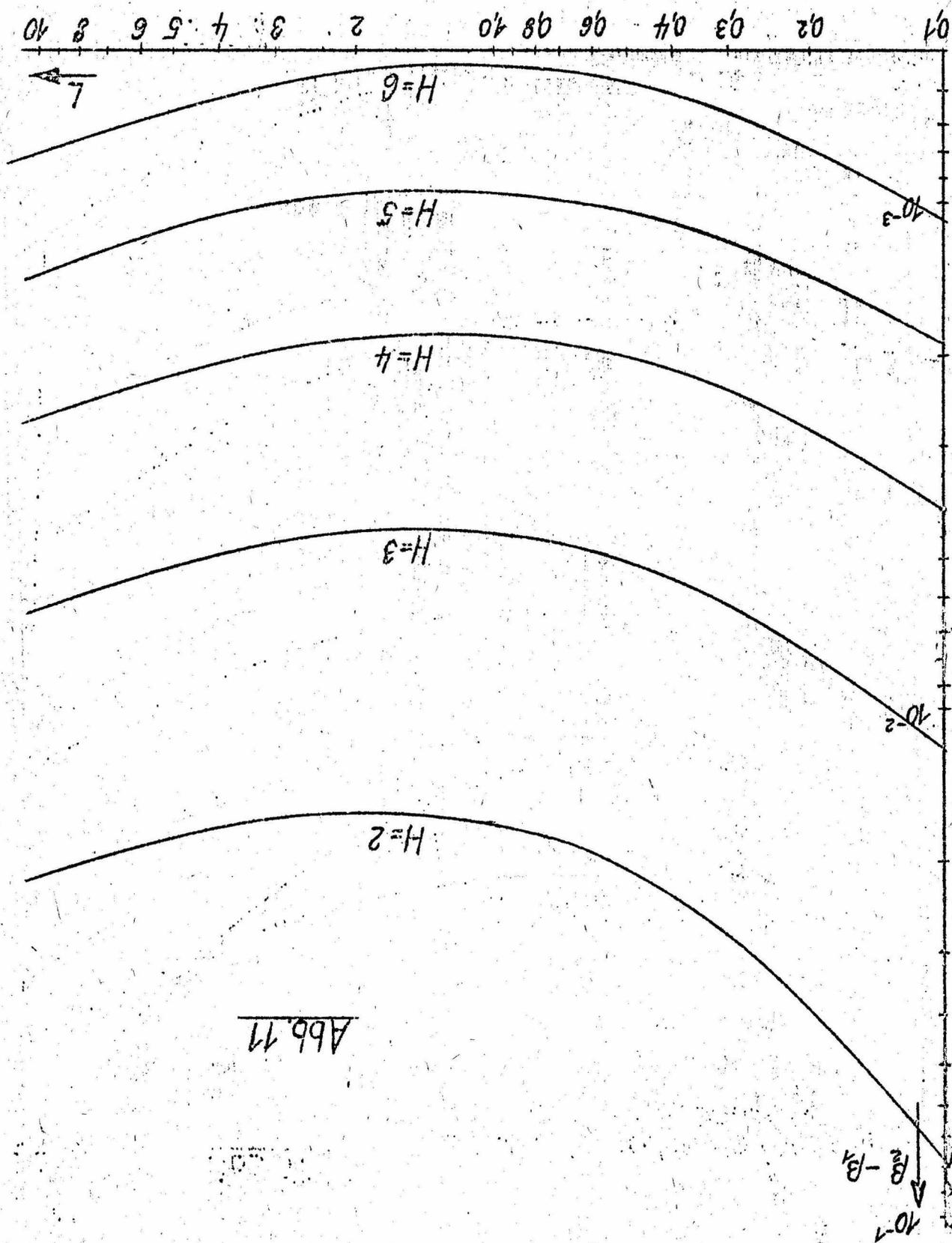


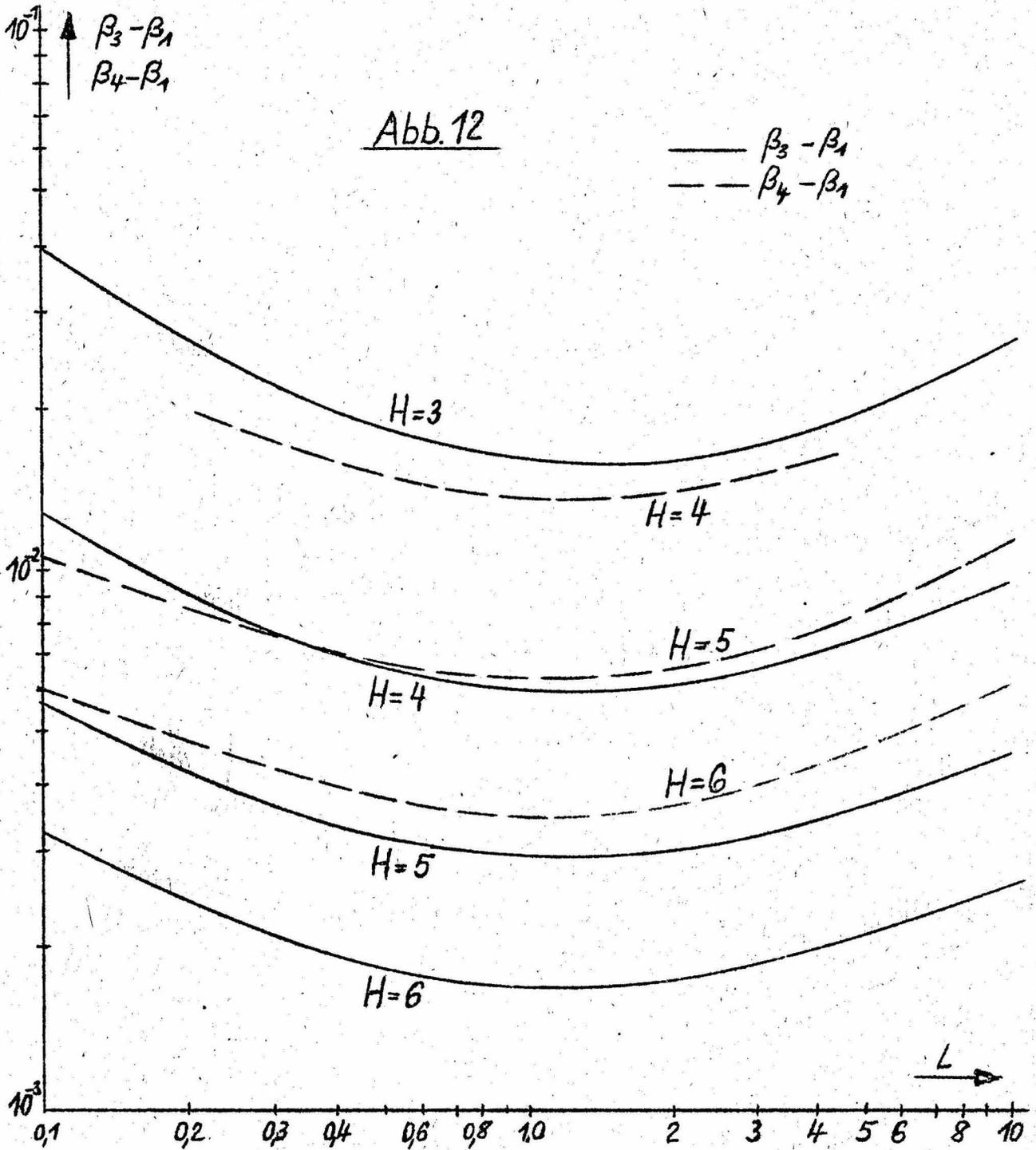
App. 9

Abb. 10

—  $\beta_1$ , rechte Ordinate  
- -  $\beta_1$ , linke Ordinate







$$e^{-\gamma_n} \quad \text{mit} \quad \gamma_n = \frac{\rho \pi^2 (n - 1/2)^2}{\sqrt{2} h^3 k^2 \bar{S}_n} \left( \sqrt{L} + \frac{1}{\sqrt{L}} \right)$$

Mit den Werten  $L = 1$  und  $\bar{S}_n \approx 1$  folgt

$$\gamma_5 = 7,2 \frac{\rho \lambda^2}{h^3}$$

Für

$$\frac{\rho \lambda^2}{h^3} > 0,7 \quad (36)$$

ist

$$e^{-\gamma_5} < 10^{-2}$$

Die Reihe Gl. 29 kann also auf die ersten vier Glieder beschränkt bleiben:

Wenn wir uns bei der strahlenoptischen Lösung Gl. 23 a auf die ersten vier Glieder beschränken wollen, also voraussetzen, dass der Betrag der viermal-reflektierten Welle

$$\sin^3 \vartheta_4 |R_I|^4 < 10^{-2} \quad \text{ist,}$$

dann muss für  $L = 1$

$$\frac{\rho}{8h} = \tan \vartheta_4 < 2,6 \quad (37)$$

sein (vergl. Abb. 4 und Abb. 6).

Der Bereich geringer Konvergenz der Gl. 29 ist für nicht zu grosse Entfernungen  $\rho$  gleichzeitig der Bereich guter Konvergenz der Gl. 23a. Der Betrag eines Mode-Gliedes der Gl. 29 besitzt als Funktion der Höhe ein Maximum bei einer optimalen Höhe  $h_{\text{opt}}$ , wie aus der Näherung Gl. 34 folgt. Es ist der Betrag des  $n$ -ten Mode-Gliedes proportional

$$\frac{1}{h} e^{-\frac{\rho \lambda^2 Q_n}{h^3}} \quad \text{mit} \quad Q_n = \frac{(n - 1/2)^2}{\sqrt{2} \cdot 4 \bar{S}_n} \left( \sqrt{L} + \frac{1}{\sqrt{L}} \right)$$

und

$$h_{\text{opt}} = 3 \rho \lambda^2 Q_n \quad (38).$$

Die optimale Höhe wächst mit der Entfernung, Wellenlänge und Modezahl.

6. Der Einfluss der Erdkrümmung auf die Ausbreitung der Längstwellen

W.O. SCHUMANN [11] hat für die gekrümmte Erde das Potential eines vertikalen Dipols im Gebiet zwischen Erdoberfläche und scharf begrenzter Ionosphäre durch Entwicklung nach Eigenfunktionen bestimmt. Seine Gleichung für die Vertikalkomponente der elektrischen Feldstärke unterscheidet sich von der Gl. 29 nur durch den Faktor

$$\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \quad (39)$$

( $\theta$  ist der Winkelabstand zwischen Sender und Empfänger), durch den die Fokussierungswirkung des gekrümmten Systems Erde-Ionosphäre zum Ausdruck kommt. Bei einer Entfernung von

$\rho' = 2000$  km ist  $\theta = 18^\circ$  und  $\sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} = 1,01$ . Bis zu dieser Entfernung braucht also die Erdkrümmung nicht berücksichtigt zu werden. Im Falle der strahlenoptischen Betrachtung erhält man an Stelle der Gl. 23a

$$E_z = 2E_0 \left[ (W'(\rho', \lambda) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \theta_n \frac{\rho'}{r'_n} R_i^n B_n e^{ik(\rho' - r'_n)}) \right] \quad (40)$$

Hier ist  $2E_0 W'(\rho', \lambda)$  die von VAN DER POL und BREMMER [12] abgeleitete Bodenwelle für die gekrümmte Erde,

$$B_n = \left(1 + \frac{h}{a}\right) \sqrt{\frac{2n \sin \theta/2n}{\sin \theta} \left[ \frac{1 - \frac{h}{a} - \cos \theta/2n}{(1 + \frac{h}{a}) \cos \theta/2n - 1} \right]}$$

ein durch die Krümmung der Erde auftretender Fokussierungsfaktor,

- a    der Erdradius
- $\rho'$  = a  $\theta$     Weglänge der Bodenwelle (vergl. Abb. 13)
- $r'_n$     Weglänge der n-fach reflektierten Welle
- h    Höhe der Ionosphäre über dem Erdboden

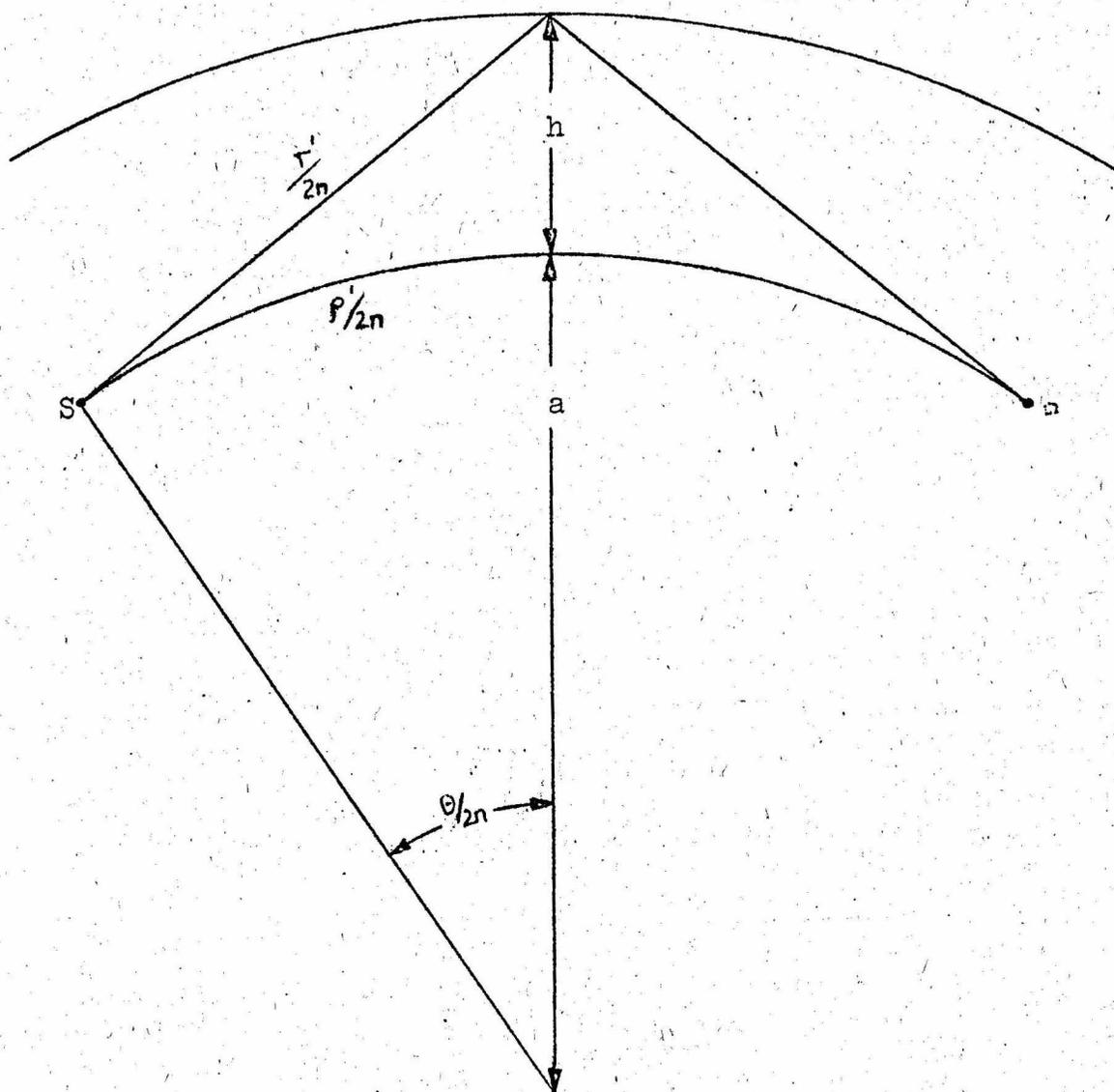


Abb. 13 Geometrie des Strahlenweges der n-fach reflektierten Welle

Die Gl. 40 gilt zunächst nur bis zum geometrischen Horizont der einfach reflektierten Welle. Dieser liegt für  $h = 70$  km in einer Entfernung von  $\rho'_h = 1900$  km vom Sender. Bei Annäherung an den geometrischen Horizont beginnt die strahlenoptische Beschreibung der reflektierten Wellen ihre Gültigkeit zu verlieren. Auf Grund von beugungstheoretischen Überlegungen kann ein Korrekturfaktor gewonnen werden, der eine Funktion von

$$\left(\frac{a}{\lambda}\right)^{1/3} \frac{(\rho' - \rho'_h)}{a}$$

ist und der im Sinne einer Verkleinerung der Amplitude der

reflektierten Welle wirkt. Für  $\rho' = \rho_h'$  und  $\lambda = 20$  km hat er den Wert von 0,7. Die fokussierende Wirkung der gekrümmten Erde wird dadurch teilweise wieder aufgehoben [13].

7. Vergleich von wellenoptischer und strahlenoptischer Beschreibung der Längstwellenausbreitung

Da die auf Grund von strahlenoptischer und wellenoptischer Rechnung bestimmten Feldstärken in Gl. 23a und Gl. 29 nur Näherungen darstellen, ist es angebracht, die aus beiden Gleichungen ermittelten Werte in einem Beispiel zu vergleichen.

Für das folgende Beispiel wurde die Frequenz  $f = 15$  kHz ( $\lambda = 20$  km) gewählt. Bei  $\rho = 1000$  km und  $h = 70$  km ist dann (siehe Gl. 36 und Gl. 37)

$$\frac{\rho \lambda^2}{h^3} = 1,2 \quad \text{und} \quad \frac{\rho}{8h} = 1,8$$

An dieser Stelle konvergieren also die beiden Reihen annähernd gleich gut.

$\rho$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$b_w$				1,45	0,94	0,24	1,31	1,63	1,97	2,54
$b_s$	1,00	1,04	0,88	1,37	0,93	0,24	1,38	1,54	2,00	2,46
$\varphi_w$				-8	32	-58	-51	-39	-31	-18
$\varphi_s$	0	3	7	-3	35	-53	-48	-33	-28	-13

$\rho$	1000	1250	1500	1750	2000	2500	3000
$b_w$	2,68	2,01	1,64	2,41	2,62	2,32	2,74
$b_s$	2,64	2,05	1,56	2,34	2,68		
$\varphi_w$	3	26	15	20	44	62	87
$\varphi_s$	7	33	22	27	51		

Tab. 4 Betrag  $b$  und Phase  $\varphi$  von  $\frac{E_z}{2E_0}$  als Funktion der Entfernung  $\rho$

mit  $f=15$  kHz;  $h=70$  km;  $L=1$ ;  $G=0$ , errechnet aus Gl. 23a (Symbol "s") und Gl. 29 (Symbol "w").

In Tabelle 4 sind die aus den Gl. 23a und 29 berechneten Werte von Betrag und Phase von  $E_z/2E_0$  als Funktion der Entfernung mit  $h = 70$  km,  $L = 1$  und  $G = 0$  gegenübergestellt. Die Reihen sind jeweils nur bis zu einer solchen Entfernung berechnet, bei der eine Beschränkung auf die ersten fünf Glieder genügt. Das ist in unserem Beispiel im strahlenoptischen Falle  $\rho \leq 2000$  km und im wellenoptischen Falle  $\rho \geq 300$  km. Im Ueberlappungsbereich  $300 \text{ km} \leq \rho \leq 2000 \text{ km}$  ist die Differenz zwischen beiden Daten nicht grösser als 5% beim Betrag bzw.  $7^\circ$  beim Argument. Tatsächlich ist die Differenz noch kleiner infolge der zufälligen Fehler der einzelnen Werte, die durch ein graphisches Verfahren ermittelt worden sind (siehe Abb. 15). In der Tabelle 5 ist für gleiche

h	20	30	35	40	45	50	55	60	65
$b_w$	0,07	0,99	1,65	2,02	2,11	2,29	1,92	1,67	2,18
$b_s$		1,30	1,78	2,06	2,07	2,21	1,95	1,68	2,18
$\varphi_w$	455	201	135	90	63	45	22	27	19
$\varphi_s$		196	136	84	68	47	24	31	25

h	70	75	80	85	90	100
$b_w$	2,68	2,42	1,84	1,67	1,43	0,05
$b_s$	2,64	2,39	1,78	1,74	1,42	0,04
$\varphi_w$	3	-23	-34	-42	-66	-303
$\varphi_s$	7	-20	-31	-34	-63	-330

Tab. 5 Betrag  $b$  und Phase  $\varphi$  von  $\frac{E_z}{2E_0}$  als Funktion der Höhe  $h$  mit  $f=15$  kHz;  $\rho=1000$  km;  $L=1$ ;  $G=0$ , errechnet aus Gl. 23a (Symbol "s") und Gl. 29 (Symbol "w").

Frequenz und Leitfähigkeit  $E_z/2E_0$  nach Betrag und Phase in Abhängigkeit von der Höhe  $h$  bei der Entfernung  $\rho = 1000$  km angegeben. Auch hier herrscht oberhalb  $h = 30$  km ausgezeichnete Uebereinstimmung zwischen strahlenoptischer und wellenoptischer Rechnung, wobei der Bereich guter Konvergenz für Gl. 23a bei

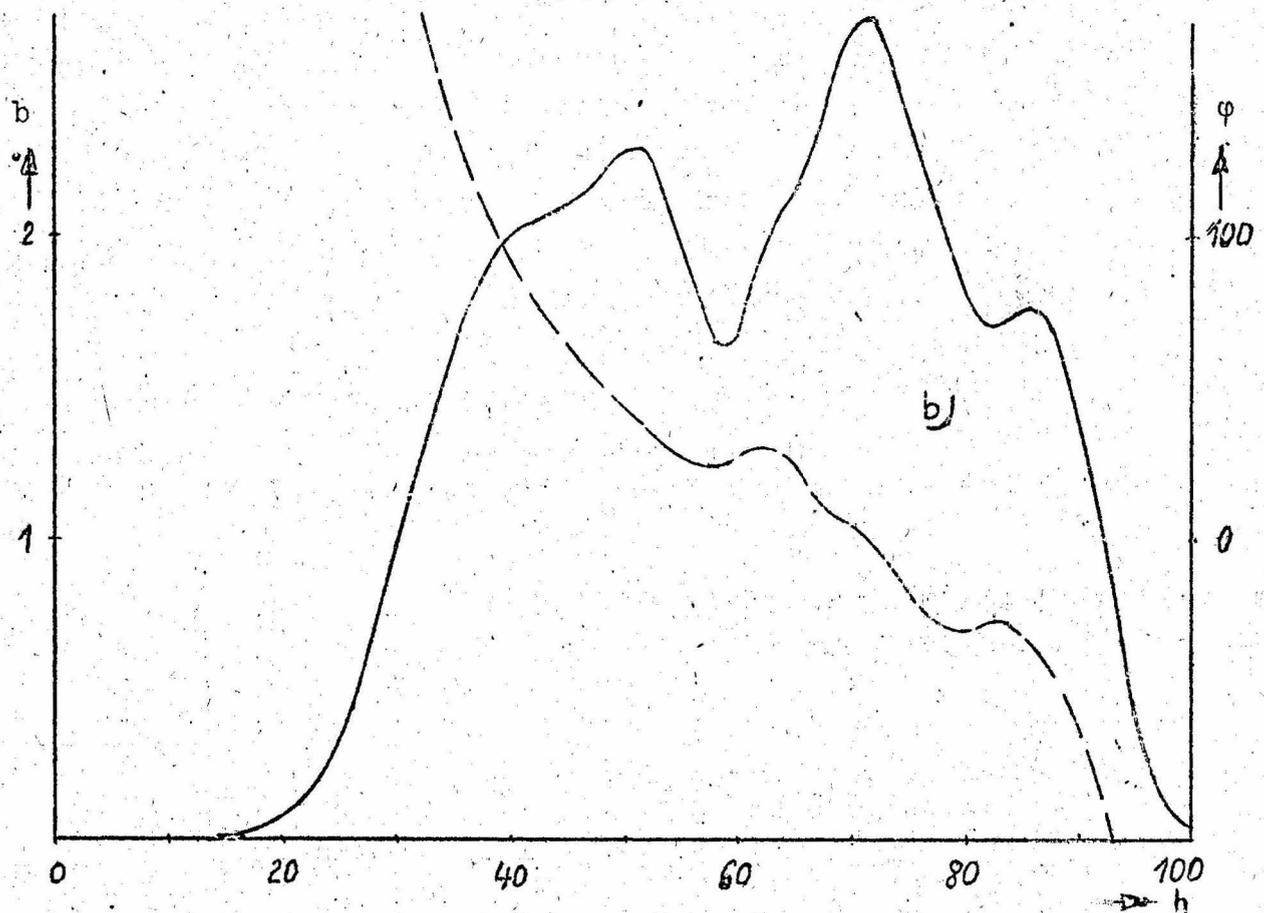
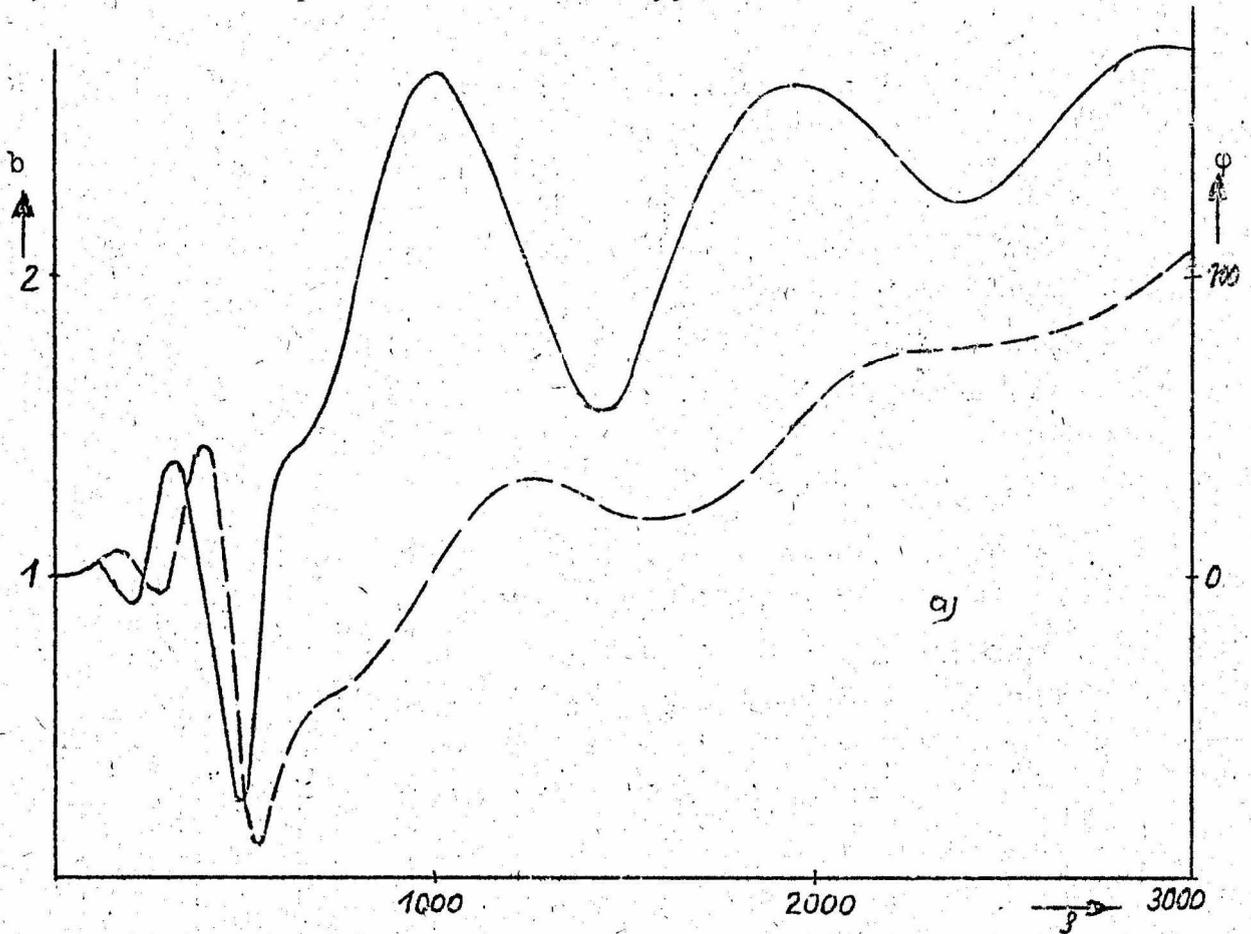


Abb. 14 Betrag  $b$  (ausgezogen) und Phase  $\varphi$  (gestrichelt) von  $E_z/2E_0$  als Funktion der Entfernung  $\rho$  (oben) und der Höhe  $h$  (unten).

$h \geq 35$  km und für Gl. 29 bei  $h \leq 100$  km liegt. Beide Gleichungen sind also äquivalent und ergänzen sich gegenseitig.

In Abb. 14 sind Betrag und Phase von  $E_z/2E_0$  als Funktion von  $\rho$  bzw.  $h$  in Kurvenform dargestellt. Der Ueberlappungsbereich befindet sich zwischen 300 und 2000 km Entfernung und oberhalb 30 km Höhe in 1000 km Entfernung bzw. 60 km Höhe in 2000 km Entfernung. Die obere Grenze der Höhe des Ueberlappungsbereiches, die bei der Frequenz von 15 kHz zu 100 km Höhe bestimmt worden war, nimmt mit wachsender Frequenz ab.

In der Abb. 14a sind die beiden ersten Minima an den Stellen 200 und 500 km und die dazugehörigen Maxima an den Stellen 300 und 1000 km die Folge der Ueberlagerung von Boden- und erster Raumwelle, der Wendepunkt bei 650 km sowie das Minimum bei 1500 km und das darauffolgende Maximum bei 1900 km die Folge der Ueberlagerung von einmal und zweimal reflektierter Welle.

In der Abb. 14b entsteht das Hauptmaximum in 72 km Höhe durch die Ueberlagerung von Bodenwelle, einmal und zweimal reflektierter Welle, während die beiden Minima in 59 und 82 km Höhe durch die Interferenz von erster und zweiter Raumwelle zustandekommen. Dies wird veranschaulicht durch die Abb. 15. Hier bedeutet der vom Punkte 0 bis zu einem der Kreise gezogene Vektor die Summe von Boden- und einmal reflektierter Welle. Die von den Kreisen ausgehenden Linienzüge geben den Anteil der zweimal bzw. drei- und viermal reflektierten Wellen an. Der vom Punkte 0 bis zu einem der durch die Ortskurve verbundenen Endpunkte der Vektorsumme gezogene Vektor ist  $E_z / 2E_0$ . Daraus sind die strahlenoptischen Werte der Tabellen 4 und 5 sowie der Abb. 14 entstanden.

Der Vollständigkeit halber ist in der Abb. 16 die aus der wellenoptischen Gleichung 29 gewonnene Vektorsumme

---

Abb. 15 Vektorsumme der Mehrwegeausbreitung. Die Strecke 0 - A entspricht der Bodenwelle, die Strecke vom Punkt A bis zu einem der Kreise entspricht der einfach reflektierten Welle, der Streckenzug von einem der Kreise bis zur Ortskurve entspricht den zwei-, drei- und vierfach reflektierten Wellen. Der Vektor von 0 zur Ortskurve ist  $E_z/2E_0$ . (siehe Tab. 4 und 5 sowie Abb. 14).

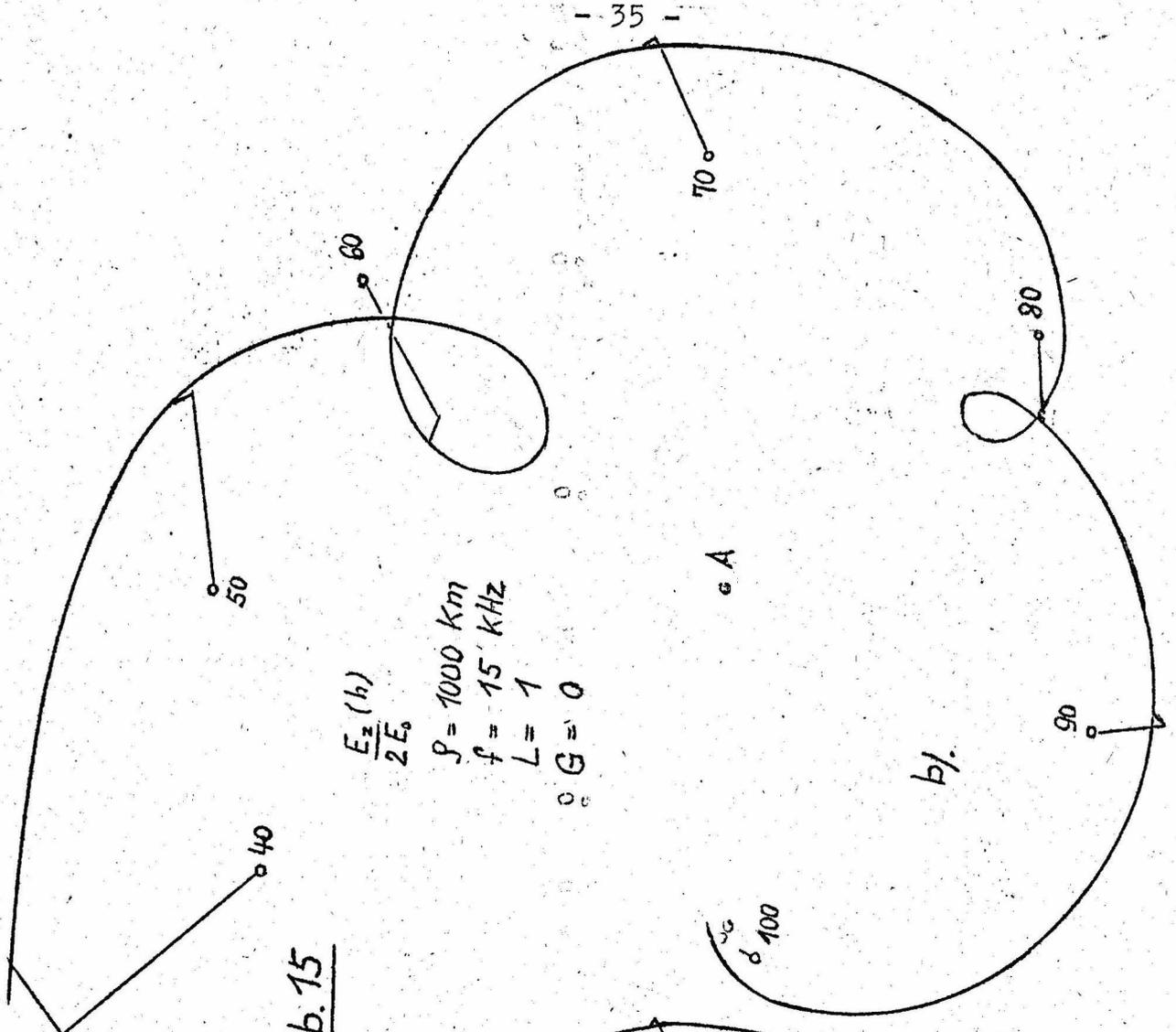
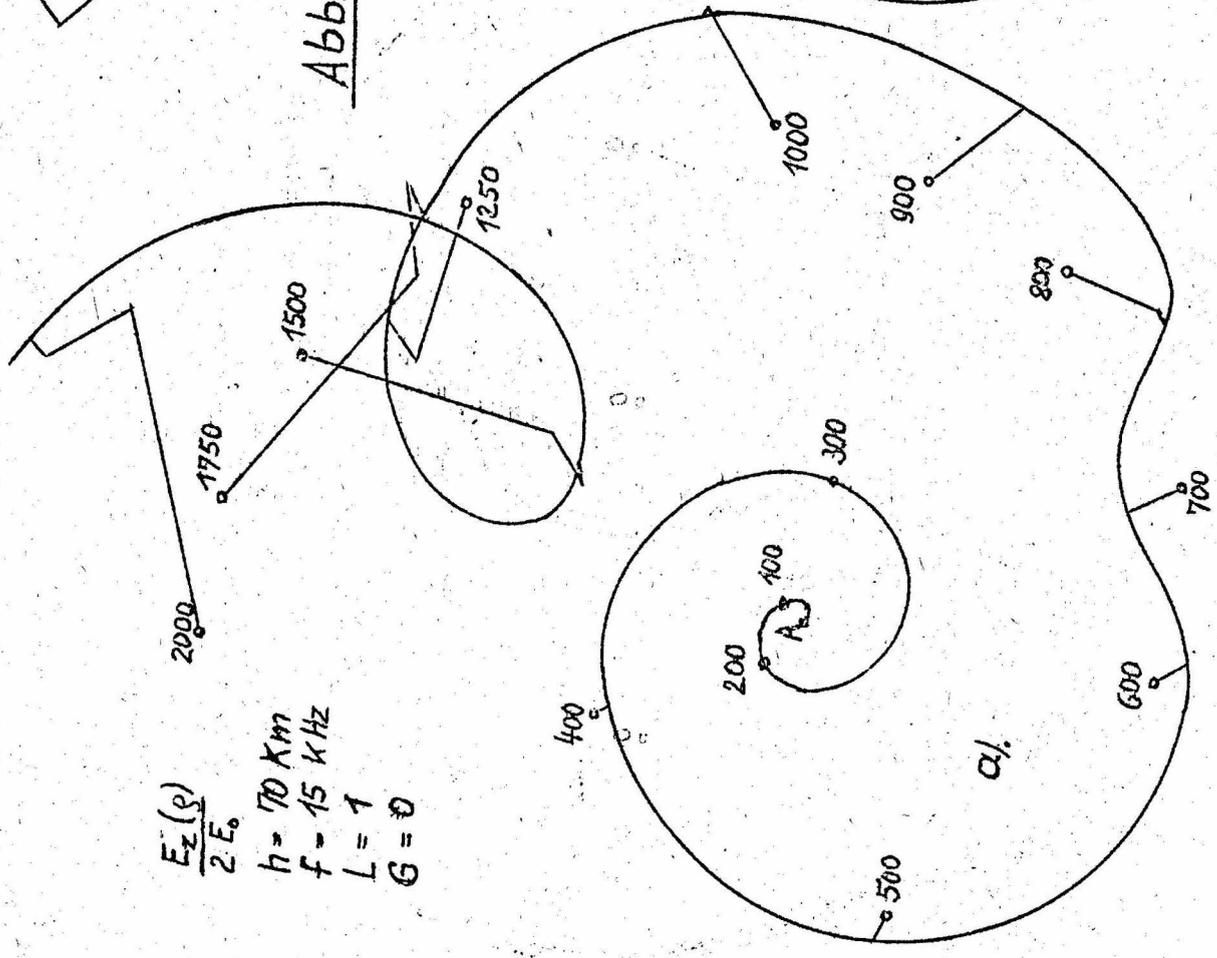


Abb. 15



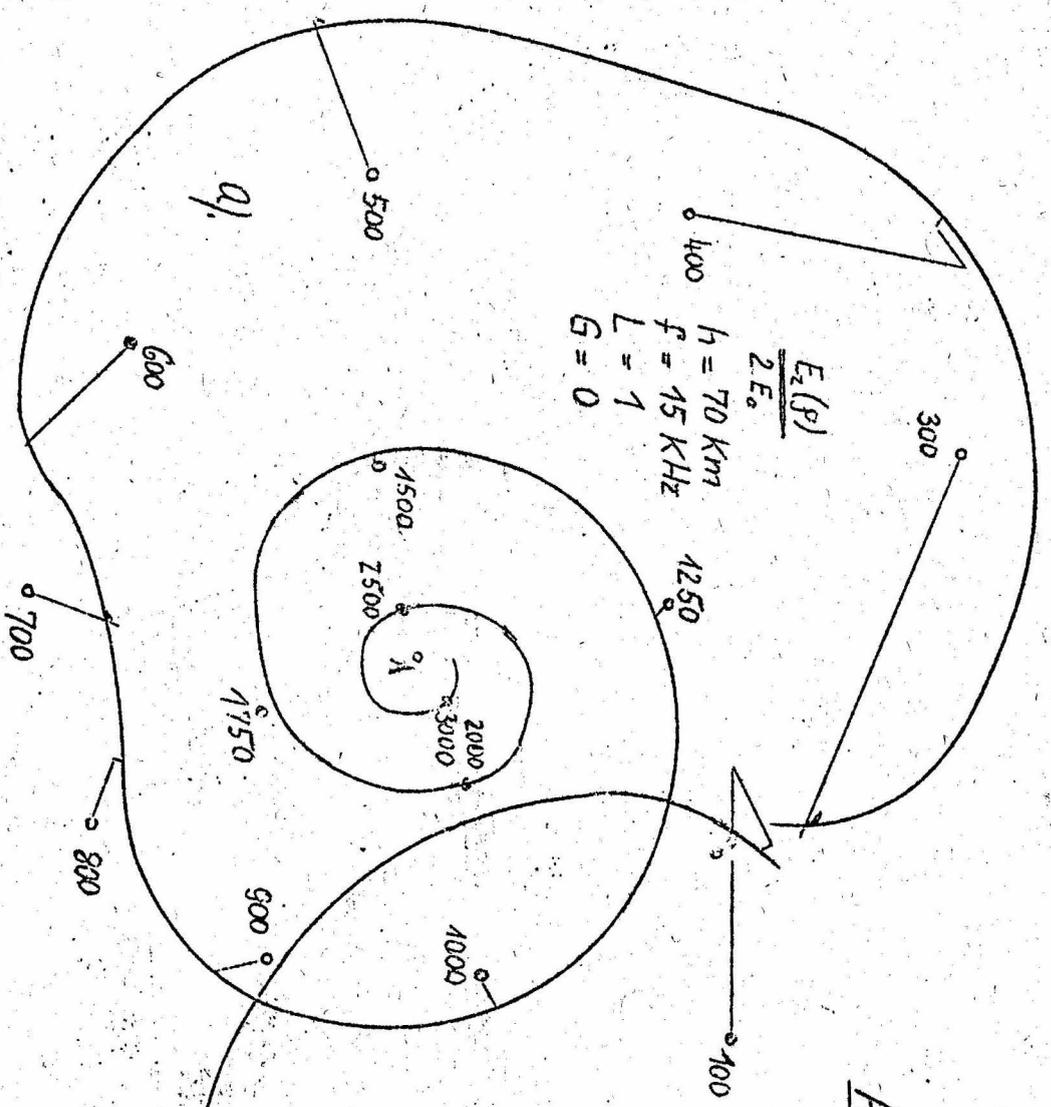
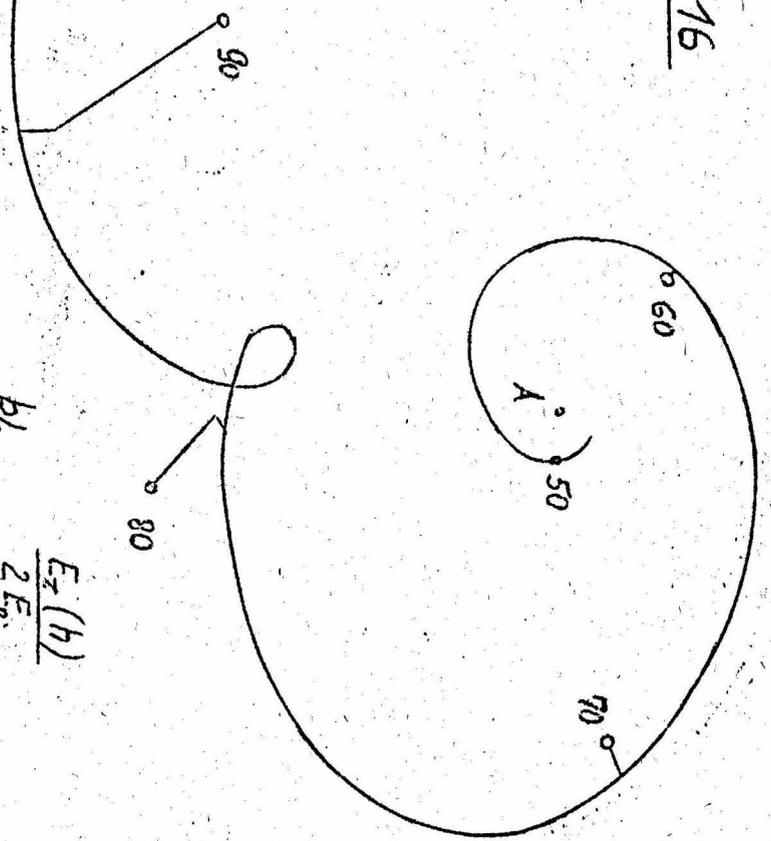


Abb. 16



$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^{3/2}}{S_1^{3/2}} e^{ik(S_1 - S_n)\rho} \quad (41)$$

für die oben gewählten Beispiele dargestellt. Mit der Grösse

$$e^{-i\pi/4} \frac{\sqrt{\rho} \lambda}{h} S_1^{3/2} e^{ik(1-S_1)\rho}$$

multipliziert, ergibt Gl. 41 den Ausdruck  $(E_z / 2E_0)_w$ , der in den Tabellen 4 und 5 tabelliert ist.

Die Hauptmaxima der Abb. 14 kommen, wie man sieht, wellenoptisch durch die Ueberlagerung der Modes erster und zweiter Ordnung zustande.

Die Uebereinstimmung der Gl. 23a und Gl. 29 für den ebenen Wellenleiter Erde-Ionosphäre und unendlich gut leitender Erde legt es nahe, bei der strahlenoptischen Rechnung den Einfluss der endlichen Leitfähigkeit und den Einfluss der Erdkrümmung durch die gleichen Faktoren zu berücksichtigen, wie dies in der wellenoptischen Rechnung geschieht (siehe Gl. 35 und Gl. 39). Dadurch wird die Rechnung wesentlich vereinfacht.

Abb. 16 Mode Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n^{3/2}}{S_1^{3/2}} e^{ik(S_1 - S_n)\rho}$  . Die Strecke

O - A entspricht dem ersten Glied der Reihe. Die Strecke vom Punkte A bis zu einem der Kreise entspricht dem zweiten Glied. Die von den Kreisen ausgehenden Linienzüge entsprechen den dritten, vierten und fünften Gliedern der Reihe.

## 8. Literatur

1. H. VOLLAND                    Zur Tages-Ausbreitung von Längstwellen über eine Entfernung von 1000 km  
Technischer Bericht Nr.37 des Heinrich-Hertz-Instituts für Schwingungsforschung, Berlin-Charlottenburg, 1959  
Die Frequenzabhängigkeit der Sonneneruptionseffekte im Längstwellengebiet  
A.E.U., 13 (1959), 443 - 448
2. R.N. BRACEWELL                Ionospheric propagation of low and very low frequency over distances less than 1000 km  
K.G. BUDDEN  
J.A. RATCLIFFE                Proc. IEE Part III 98 (1951), 221 - 236  
T.W. STRAKER  
K. WEEKES
3. R.E. HOUSTON                 zitiert bei A.H. WAYNICK  
The present state of knowledge concerning the lower ionosphere  
Proc. IRE 45 (1957), 741 - 749
4. M. NICOLET                  Collision frequency of electrons in the terrestrial atmosphere  
Phys. of Fluids 2 (1959), 95 - 99
5. A.L. ALPERT                 Ueber die Ausbreitung sehr langer elektromagnetischer Wellen über die Erdoberfläche  
Verlag der Akademie der Wissenschaften d. UdSSR, Moskau, (1955), russ.
6. J.R. WAIT                    The mode theory of VLF ionospheric propagation for finite ground conductivity  
Proc. IRE 45 (1957), 760- 767
7. J.W. YABROFF                Reflexion at a sharply-bounded ionosphere  
Proc. IRE 45 (1957), 750 - 753
8. H. WEYL                     Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter  
Ann.Phys. 60 (1919), 481 - 500
9. A. SOMMERFELD               Partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik  
Akademische Verlagsanstalt Geest und Portig, Leipzig 1948
10. RJASIN                      zitiert bei M.P. DOLUCHANOW  
Die Ausbreitung von Funkwellen  
Verlag Technik, Berlin, 1956

11. W.O. SCHUMANN      Ueber die Oberwellenfelder bei der Ausbreitung langer elektrischer Wellen im System Erde-Luft-Ionosphäre und zwei Anwendungen (horizontaler und vertikaler Dipol)  
Z. angew. Phys. 6 (1954), 35 - 43
12. H. BREMMER        Propagation of electromagnetic waves  
Handbuch der Physik, Bd. 16, Springer-Verlag, Berlin, 1958
13. J. R. WAIT        The geometrical optics of VLF sky wave propagation  
A. MURPHY            Proc. IRE 45 (1957), 754 - 760